

Joan Olivella Puig

Teoría del buque

Ola trocoidal, movimientos y esfuerzo



Teoría del buque

Ola trocoidal, movimientos y esfuerzo

Joan Olivella Puig

Teoría del buque

Ola trocoidal, movimientos y esfuerzo



Primera edición: septiembre de 1998
Reimpresión: noviembre de 2011

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

© Joan Olivella Puig, 1998

© Iniciativa Digital Politècnica, 1998
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, D-203, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B-29657-1998
ISBN: 978-84-8301-259-8

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.

Prólogo

Franz Gerstner presentó en 1802 una teoría basada en una ola cuyo perfil tenía la forma de trocoide. La teoría trocoidal combina una representación geométrica relativamente adecuada y simple, con un tratamiento matemático sencillo, pero con limitaciones en su desarrollo. Ha sido ampliamente utilizada y sigue siéndolo en los estudios de estabilidad y movimiento del buque, y en los cálculos de la resistencia y los esfuerzos estructurales del casco. Esto ha llevado a que la ola trocoidal haya echado raíces en la formación de los marinos. Así que no es de extrañar que se haya dedicado algo más de un capítulo a su conocimiento, con especial incidencia en aquellos conceptos y en aquellas relaciones que serán de utilidad en capítulos posteriores, facilitando su comprensión y evitando discontinuidades en su contenido.

Los movimientos del buque que se estudian son el balance, el cabeceo y la traslación vertical. De entre estos movimientos, el balance ha tenido un trato preferencial debido, entre otras, a las siguientes razones: es un movimiento que permite tomarlo como base por tener una aportación más amplia de conceptos, permite entender el movimiento del buque entre olas y la problemática especial del sincronismo, y, también, debido a la importancia que tiene en la pérdida de algunos buques por la falta de estabilidad transversal.

El estudio de la ola trocoidal y del movimiento del buque presenta una carga teórica llevada hasta donde ha sido mínimamente necesario, lo que junto a una serie de ideas prácticas, tienen la finalidad de dar al estudioso las herramientas que le ayuden a sacar sus propias conclusiones frente a las situaciones reales del día a día del marino.

Finalmente, se entra en el estudio de los esfuerzos del casco, fundamentalmente los esfuerzos longitudinales, más extendidos dentro de la cultura del marino, y se introducen los momentos de torsión ya que se están manifestando en los buques con grandes aberturas en la cubierta resistente. Es de destacar el apéndice, en el que se encontrará la salida de las curvas de esfuerzos de un programa de ordenador de uso a bordo de los buques.

Barcelona, junio de 1.998

Juan Olivella

Agradecimiento

Cuando al cabo de los años terminas un trabajo, como es el caso de este libro, y se hace algo así como un balance de su historia, te das cuenta que no ha sido fruto de la casualidad, sino de una idea que esporádicamente se iba persiguiendo, dedicándole tiempo y esfuerzo, sin pensar siquiera en que se convirtiera en una publicación, pero inconscientemente insistiendo en la recopilación de datos y en el estudio del tema. No recuerdo cuánto tiempo hace de esto, lo que sí recuerdo es que *Antoni Vila i Mitjà*, amigo y gran profesor de lo que genéricamente llamamos matemáticas, estaba allí para prestarme la ayuda necesaria para descifrar acertijos y convertirlos en algo inteligible. Es por esto que quiero aprovechar esta ocasión para agradecerte cordialmente la gran ayuda que siempre he encontrado en ti, una ayuda sincera, sencilla, eficaz, como la entiendes tú.

Juan Olivella

Índice

1 Ola trocoidal

1.1	Olas en la superficie libre de la mar	15
1.2	Olas de gravedad	15
1.3	Movimiento de las partículas de agua de las olas	16
1.4	Características de las olas	18
1.5	Altura de la ola significativa	21
1.6.1	Velocidad de encuentro de la ola	21
1.6.2	Período de encuentro de la ola	22
1.6	Velocidad y período de encuentro	21
1.7	Formación de las olas generadas por el viento	23
1.8	Olas regulares e irregulares	26
1.9	Introducción al estudio teórico de las olas de gravedad	27
1.10	Potencial de velocidad de las olas regulares de gravedad	27
1.11	Teoría potencial de las olas regulares	28
1.12	Teoría de la ola trocoidal	42
1.13	Ola trocoidal	42
1.14	Ecuaciones paramétricas de la ola trocoidal	43
1.15	Geometría de la ola trocoidal	44
1.16	Horizontales y verticales hidrodinámicas	46

2 Hidrodinámica de la ola trocoidal

2.1	Ola estacionaria	49
2.2	Triángulos de radios y de velocidades	50
2.3	Condiciones hidrodinámicas de la ola trocoidal	51
2.4	Presión sobre una superficie trocoidal	52
2.4.1	Aplicación del teorema de Bernoulli	53
2.4.2	Ecuaciones del triángulo de radios	54
2.4.3	Triángulo de fuerzas	56
2.5	Aceleración de las partículas de la superficie trocoidal	57
2.6	Velocidad y período de propagación de la ola	58

2.7	Disminución del radio orbital	60
2.7.1	Variación del espesor con el radio instantáneo	61
2.7.2	Ley de decrecimiento del radio orbital con la profundidad	63
2.8	Línea horizontal de centros de órbitas	65
2.9	Incrementos de la presión entre dos superficies trocoidales	68
2.10	Energía de la ola	71

3 Movimientos del buque

3.1	Introducción	79
3.2	Movimientos del buque	79
3.3	Movimiento armónico simple	81
3.3.1	Ecuación del movimiento armónico simple	82
3.4	Balance, cabeceo y traslación vertical	83
3.5	Oscilación y período	84
3.6	Balance	84
3.7	Balance en aguas tranquilas y sin resistencia	85
3.7.1	Fórmula del período doble de balance	86
3.7.2	Ecuación diferencial del movimiento de balance	88
3.7.3	Ecuación diferencial de la aceleración angular	90
3.7.4	Velocidades angulares para la condición de buque adrizado	90
3.7.5	Ecuación del movimiento de balance sin resistencia	92
3.8	Balance entre olas, sin resistencia	93
3.8.1	Balance absoluto y relativo	93
3.8.2	Pendiente de la trocoide	94
3.8.3	Ecuación de la perturbación de la ola	96
3.8.4	Solución a la ecuación del movimiento de balance entre olas	99
3.8.5	Efecto de la estabilidad inicial del buque sobre la aceleración angular del balance	101
3.8.6	Oscilación forzada	103
3.9	Movimiento del buque entre olas debido al balance	105
3.10	Sincronismo transversal	109
3.11	Balance en aguas tranquilas, con resistencia	115
3.11.1	Disminución del balance	117
3.11.2	Período doble de balance para aguas tranquilas y con resistencia	119
3.12	Balance entre olas, con resistencia	127
3.13	Movimiento de balance entre olas, con resistencia	135
3.14	Efecto del amortiguamiento sobre el sincronismo	139
3.15	Determinación de la estabilidad inicial del buque con el período doble de balance	143
3.16	Balance del buque navegando entre olas de dirección constante cualquiera	145
3.16.1	Sincronismo transversal	147

3.16.2	Manera de evitar el sincronismo	147
3.17	Movimiento de cabeceo entre olas, sin resistencia	148
3.17.1	Período doble de cabeceo	149
3.17.2	Velocidad y período de encuentro	151
3.17.3	Cabeceo entre olas, sin resistencia	153
3.17.4	Sincronismo longitudinal	155
3.17.5	Pantocazos	156
3.18	Movimiento de cabeceo entre olas, con resistencia	157
3.19	Movimiento vertical del buque	158
3.19.1	Oscilación vertical en aguas tranquilas	158
3.19.2	Ecuación del movimiento vertical no amortiguado en aguas tranquilas . . .	159
3.19.3	Ecuación del movimiento vertical con amortiguamiento en aguas tranquilas	160
3.19.4	Movimiento vertical entre olas	161
3.20	Acoplamiento entre los movimientos de balance y de cabeceo	162
4	Esfuerzos del casco	
4.1	Introducción	165
4.2	Clasificación de las fuerzas sobre el casco del buque	165
4.3	Esfuerzos longitudinales. Teoría de la flexión de la viga	167
4.4	Momento flector máximo admisible	170
4.5	Esfuerzos longitudinales sobre el buque en aguas tranquilas	171
4.6	Buque entre olas. Ola trocoidal	173
4.6.1	Ola trocoidal más perjudicial	173
4.6.2	Perfil de la ola trocoidal sobre el plano diametral	175
4.7	Curva de pesos	177
4.8	Curva de empujes	178
4.8.1	Curvas de Bonjean	178
4.8.2	Curvas de empujes para el buque en aguas quietas y entre olas	180
4.9	Curvas de cargas, esfuerzos cortantes y momento flector	181
4.9.1	Curva de cargas	181
4.9.2	Curva de esfuerzos cortantes	182
4.9.3	Curva del momento flector	184
4.9.4	Curvas típicas de esfuerzos cortantes y momento flector	185
4.9.5	Valores máximos admisibles de esfuerzos cortantes y momentos flectores	186
4.10	Cálculo de los esfuerzos longitudinales	187
4.11	Momento flector: líneas de influencia	189
4.12	Flecha de la flexión de la quilla	196
4.13	Esfuerzos longitudinales horizontales	198
4.14	Momento de torsión	198

Apéndice

Aplicación de los ordenadores: curvas de esfuerzos longitudinales y momento de torsión	201
--	-----

Bibliografía	207
-------------------------------	-----

Índice alfabético	209
------------------------------------	-----

Índice de figuras

1.1	Comparación de las formas de las olas sinusoidal y trocoidal	16
1.2	Movimiento de una partícula de agua de la ola. Profundidad ilimitada	17
1.3	Movimiento de una partícula de agua de la ola. Profundidad limitada	17
1.4	Ola trocoidal bidimensional	18
1.5	Características de la ola trocoidal en el espacio	18
1.6	Características de la ola trocoidal en el tiempo	20
1.7	Velocidad de encuentro	22
1.8	Transmisión de energía del viento a la ola	25
1.9	Grupo de olas	38
1.10	Ola trocoidal	42
1.11	Trazado del perfil de la ola trocoidal	45
1.12	Propagación de la ola trocoidal	45
1.13	Horizontales y verticales hidrodinámicas	46
2.1	Ola estacionaria	50
2.2	Triángulos de radios y velocidades	50
2.3	Superficies trocoidales	51
2.4	Presión sobre una superficie trocoidal	53
2.5	Triángulo de radios	55
2.6	Triángulo de fuerzas	56
2.7	Disminución de los radios orbitales	60
2.8	Línea de centros de órbitas	66
2.9	Incremento de presión entre dos superficies trocoidales	68
2.10	Momento del volumen elemental con respecto a la línea de senos	72
3.1	Movimientos del buque	80
3.2	Movimiento armónico simple	82
3.3	Curvas estáticas y dinámicas adrizantes y escorantes	85
3.4	Ángulos de balance absoluto y relativo	93
3.5	Plano de inclinación transversal. Normales a los perfiles de la trocoide	94
3.6	Pendiente de la trocoide	95
3.7	Buque entre olas. Momento adrizante	97
3.8	Balances forzado y libre, $T_d < T_w$	106

3.9	Balances forzado y libre, $T_d > T_w$	108
3.10	Balance del buque entre olas. Sincronismo transversal	114
3.11	Sincronismo transversal. Amplitudes del ángulo de balance	115
3.12	Olas de radiación y zonas de sobrepresión y depresión	117
3.13	Amortiguación del balance	117
3.14a	Ángulo máximo de balance para T muy pequeño y para $T_d = T_w$	142
3.14b	Ángulo máximo de balance para T_d grande y para $T_d = T_w$	142
3.15	Componente transversal de la longitud de la ola	146
3.16	Perfiles de la superficie libre sobre el plano diametral	148
3.17	Componente diametral de la longitud de la ola	151
3.18	Cabeceo con olas de popa, $T_e > T_p$	154
3.19	Sincronismo longitudinal	155
3.20	Movimiento de oscilación vertical	159
3.21	Oscilación vertical. Cresta en el centro del buque	161
3.22	Oscilación vertical. Seno en el centro del buque	162
4.1	Teoría de la flexión de la viga	167
4.2	Distribución de cargas	171
4.3	Buque entre olas. Quebranto	174
4.4	Buque entre olas. Arrufo	174
4.5	Curva de pesos	177
4.6	Curvas de Bonjean	179
4.7	Obtención del área y del momento de cada sección, para una flotación determinada	179
4.8	Curvas de empujes para los casos A), B) y C)	180
4.9	Curvas de pesos y empujes	181
4.10	Curva de cargas	182
4.11	Curvas de cargas y esfuerzos cortantes	184
4.12	Curvas de esfuerzos cortantes y momento flector	185
4.13	Curvas de momentos flectores en aguas tranquilas y entre olas	186
4.14	Cálculo de las líneas de influencia	190
4.15	Línea de influencia	196
4.16	Paso de una ola abierta por babor	199
4.17	Momento de torsión producido por el empuje de las cuñas	199
4.18	Curva de la torsión estática por unidad de longitud	200
4.19	Curva del momento de torsión	200

1 Ola trocoidal

1.1 Olas en la superficie libre de la mar

Las olas que se producen en la superficie libre de la mar tienen una importancia definitiva sobre el movimiento del buque, incidiendo aquéllas, además, en su estabilidad y en los esfuerzos estructurales que deberá soportar a lo largo de su vida activa, ambos dependientes, también, de la distribución de la carga, siendo ésta responsabilidad del capitán y de la tripulación.

La superficie libre presenta una apariencia irregular muy compleja, existiendo una cierta regularidad, solamente y de modo amplio, en que las crestas y los senos de las olas progresan en el mismo sentido y que se suceden alternativamente. El tiempo entre pasos de crestas, sus alturas y las distancias entre las mismas, varían amplia y erráticamente.

Para evaluar el efecto de tal superficie irregular en el comportamiento del buque es necesario realizar un análisis sistemático, descomponiendo un fenómeno físico complejo en partes del mismo más simples para estudiar entonces sus efectos, de manera que a partir de las partes se pueda cuantificar el todo. Este método asume que las olas irregulares están formadas por la superposición de un número de olas regulares de diferentes características, y que el movimiento del buque será el resultado de la superposición de los efectos de cada una de estas olas regulares.

1.2 Olas de gravedad

Desde el punto de vista del mecanismo físico que produce las olas, existe una amplia variedad de ellas en la mar. Sin entrar en su clasificación, perfectamente tipificada y definida, nuestro interés se centra en las olas formadas por el viento, las cuales pertenecen al grupo denominado de gravedad.

Lo normal es que las olas de la superficie libre de la mar sean consecuencia de una perturbación usualmente no uniforme. Las partículas de agua, debido a la perturbación, son desplazadas de su posición de equilibrio requiriendo una fuerza restauradora para volver a ella. El resultado de la fuerza restauradora será la de cerrar el primer ciclo de una partícula y proporcionar la fuerza de desplazamiento del siguiente ciclo. Esta secuencia alternada de desplazamientos y restauraciones establece el movimiento típico de oscilación de las olas, a las cuales, en su definición teórica regular, se les da forma sinusoidal, denominada también ola armónica y cuyo estudio se realiza a través de

la teoría potencial de la ola, o bien se las supone de forma trocoidal, desarrollada a través de la teoría del mismo nombre, siendo la que principalmente nos ocupa en este capítulo, (Fig. 1.1).

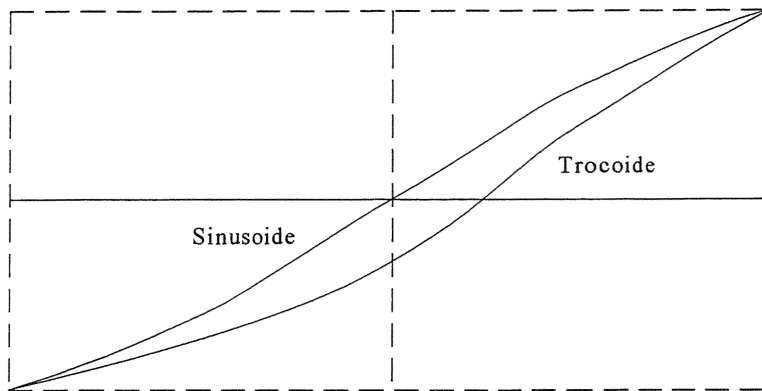


Fig. 1.1 Comparación de las formas de las olas sinusoidal y trocoidal

Básicamente, hay dos clases de fuerzas restauradoras que mantienen el proceso oscilatorio de las olas:

- a) la fuerza de la gravedad ejercida por la tierra, y
- b) la tensión superficial, siendo ésta la fuerza sobre las moléculas de la superficie libre de un líquido como resultado de las fuerzas de cohesión intermoleculares.

Ambas fuerzas restauradoras actúan en el caso de las olas producidas en la superficie libre de la mar. Cuando la longitud entre dos crestas situadas momentánea y secuencialmente es menor de 1,7 cm, la fuerza de restauración principal es la tensión superficial, denominándose olas capilares. Por encima de esta longitud de ola, la fuerza restauradora más importante es la de gravedad, llamándose en este caso olas de gravedad.

1.3 Movimiento de las partículas de agua de las olas

El hecho experimentado de que las partículas de agua de una ola tienen muy poco o casi nulo movimiento de traslación lleva a las propuestas de que su movimiento puede ser o una oscilación más o menos vertical, o que describen una trayectoria cerrada, tal como una circunferencia. La primera hipótesis significaría la formación de una depresión en la columna de agua debajo de una cresta y compresión del agua de la columna coincidiendo con un seno. Las observaciones realizadas indican que esto no ocurre así, por tanto, hay que descartar esta propuesta. Lo más probable parece ser que las partículas de la ola giren en órbitas elípticas o circulares, el plano de las cuales es vertical y perpendicular a las líneas de crestas y senos. Esta segunda hipótesis es la base para las teorías potencial y trocoidal de la ola.

Las partículas de una ola en aguas de profundidad ilimitada giran en órbitas casi circulares, entendiéndose por profundidad ilimitada la suficiente para que el fondo no afecte a las partículas de

la ola. En la cresta de la ola, las partículas se mueven en el mismo sentido que la propagación de la misma, mientras que en el seno se mueven en sentido opuesto. Los diámetros de las órbitas decrecen exponencialmente con la profundidad, de manera que el efecto de la ola llegará a desaparecer, (Fig. 1.2). Se toma como valor orientativo para el cual el efecto de la ola es prácticamente nulo una profundidad igual a la mitad de la longitud de la ola.

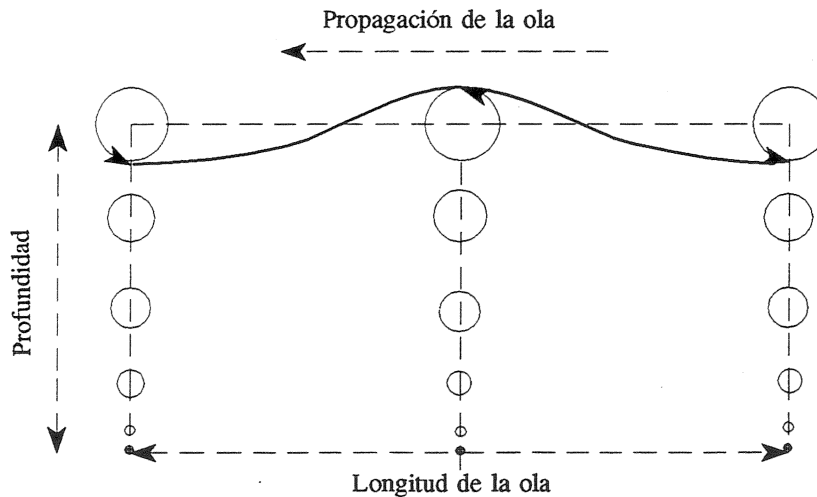


Fig. 1.2 Movimiento de una partícula de agua de la ola. Profundidad ilimitada

En aguas de profundidad limitada, este caso se dará cuando la profundidad hasta el fondo de la mar sea inferior a la mitad de la longitud de la ola, las órbitas sufren además un proceso de aplanamiento, convirtiéndose en el límite, en el fondo, en un movimiento de oscilación longitudinal, (Fig. 1.3).

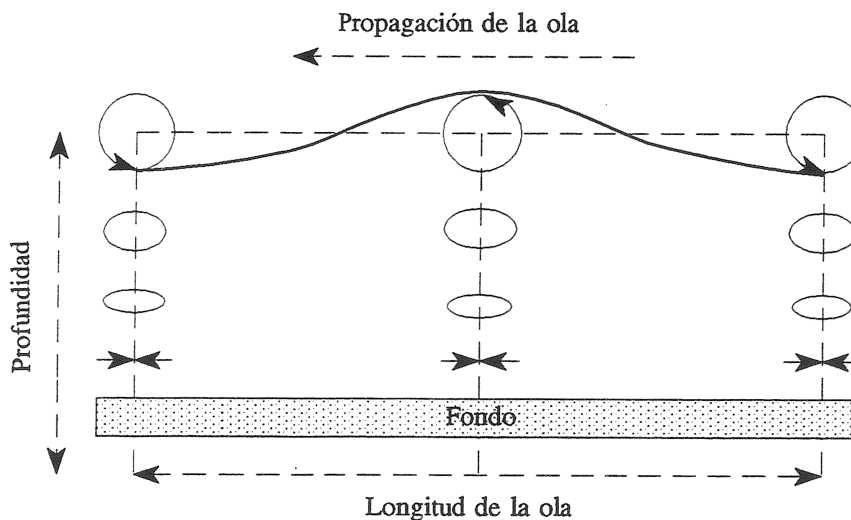


Fig. 1.3 Movimiento de una partícula de agua de la ola. Profundidad limitada

1.4 Características de las olas

En el entorno del buque, una de las maneras más simple y usual de describir el perfil de las olas de la superficie libre de la mar es mediante la ola trocoidal bidimensional, es decir, uniforme y no limitada en el espacio, (Fig. 1.4).

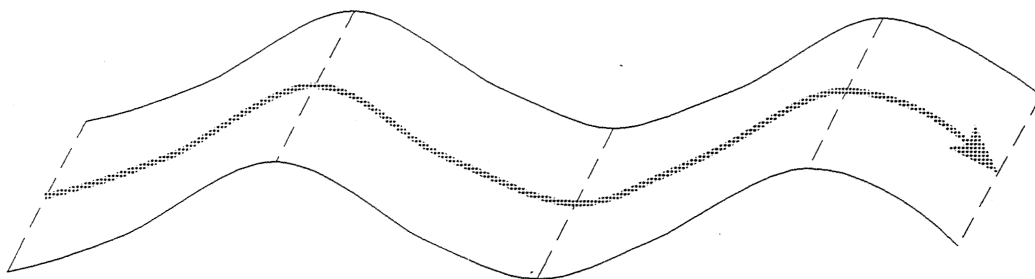


Fig. 1.4 Ola trocoidal bidimensional

Cresta y seno. Se llama cresta de la ola a la parte más alta de la misma y seno a la parte más baja, (Fig. 1.5).

Longitud, L . Distancia longitudinal entre dos crestas consecutivas o, también, entre dos senos consecutivos, (Fig. 1.5).

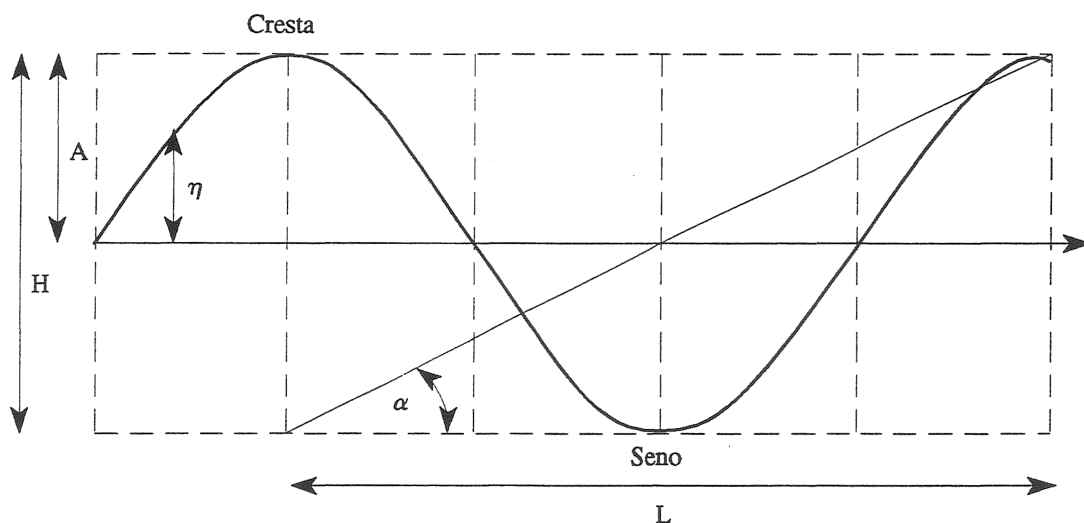


Fig. 1.5 Características de la ola trocoidal en el espacio

Altura, H. Distancia vertical entre la cresta y el seno de la ola, (Fig. 1.5).

Amplitud, A. Distancia vertical entre una cresta, o un seno, y el nivel de la superficie libre correspondiente a aguas quietas, (Fig. 1.5). En el planteamiento generalista de la ola trocoidal las dos amplitudes serán iguales y su suma igual a la altura, estableciéndose la relación $A = H/2$.

Elevación de la ola, η . Distancia vertical de un punto cualquiera de la superficie libre de la ola, en un instante determinado, sobre el nivel del mar en aguas quietas, (Fig. 1.5).

Número de ola, k. Indica el número de ciclos por unidad de distancia, que para la ola trocoidal será por metro de longitud. También puede definirse como el número de longitudes de ola por ciclo.

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (1.1)$$

Pendiente, α . Es la relación entre la altura y la longitud de la misma, (Fig. 1.5),

$$\tan \alpha = \frac{H}{L} \quad (1.2)$$

También se puede hallar la pendiente que hay entre una cresta y un seno, dividiendo, en este caso, la altura por la mitad de la longitud de la ola,

$$\tan \alpha \frac{L}{2} = \frac{H}{L/2} \quad (1.3)$$

Hasta aquí se han visto las características básicas de las dimensiones de la ola trocoidal en el espacio para un instante determinado. En la figura 1.6 se muestran las características en el tiempo para un punto fijo en el espacio.

Período, T. Intervalo de tiempo en segundos entre el paso de dos crestas, o dos senos, sucesivos por un mismo punto, (Fig. 1.6). También se puede definir como el tiempo empleado por una cresta, o un seno, en recorrer una distancia igual a la longitud de la ola.

Frecuencia, ω . Número de crestas, o de senos, que pasan cada segundo por un punto fijo en el espacio. Entre el período y la frecuencia existe, pues, la relación de reciprocidad,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.4)$$

Velocidad de la ola. Definidas la longitud y el período de la ola, dimensiones de espacio y tiempo respectivamente, la velocidad de traslación del perfil de la ola, o simplemente velocidad de la ola, denominada también velocidad de fase, será,

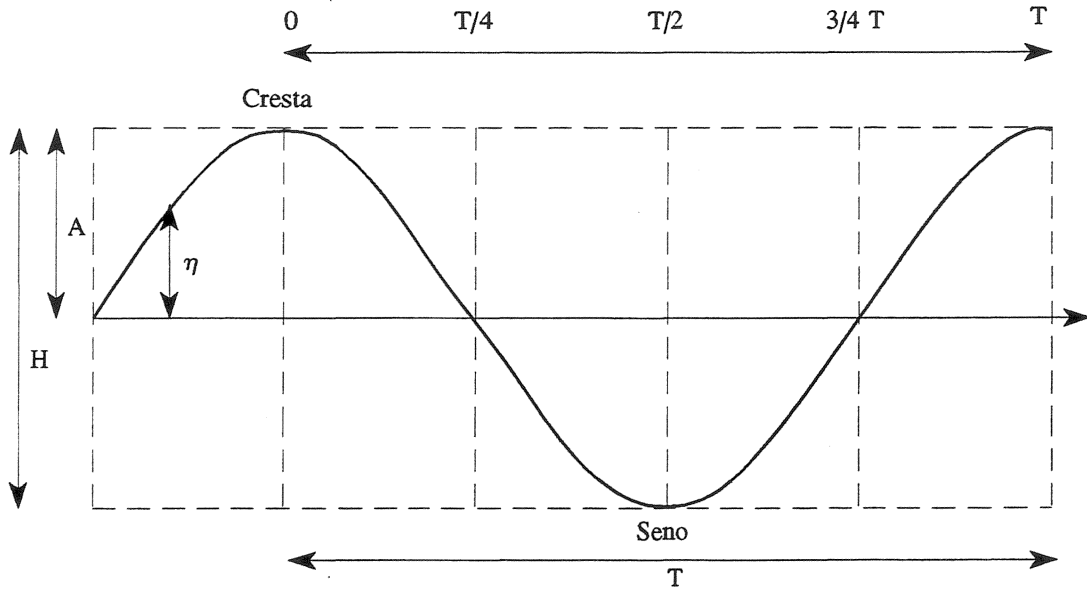


Fig. 1.6 Características de la ola trocoidal en el tiempo

$$V_w = \frac{L}{T} \quad (1.5)$$

Al depender la velocidad de las olas de la longitud y del período, olas de diferentes longitudes, o períodos, se propagarán a velocidades diferentes, siendo, por lo tanto, dispersivas. Un hecho sentenciado por la observación es que las olas largas se desplazan más rápidamente que las olas cortas.

Multiplicando por 2π el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación 1.5, y teniendo en cuenta las definiciones de frecuencia, (Ec. 1.4), y número de ola, (Ec. 1.1), quedará la velocidad de la ola en función de estos dos parámetros.

$$V_w = \frac{2\pi \cdot L}{T \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{k} \quad (1.6)$$

Velocidad de una partícula. En el apartado anterior se ha indicado que las partículas de agua giran en órbitas prácticamente circulares. La circunferencia descrita por una partícula tendrá por diámetro lo que hemos definido como la altura de la ola, H , y el tiempo empleado en realizar un ciclo completo será igual al período, T , de la ola. Como conclusión de este planteamiento realizado, la velocidad media de una partícula tendrá por valor la razón entre la longitud de la circunferencia descrita por la misma y el tiempo empleado.

Llamando u a la velocidad media de la partícula, su valor será igual a,

$$u = \frac{2\pi \frac{H}{2}}{T} = \frac{\pi \cdot H}{T} \quad (1.7)$$

Se puede establecer la siguiente relación entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la ola en función de su altura y longitud,

$$\frac{u}{V_w} = \frac{\pi \cdot H/T}{L/T} = \frac{\pi \cdot H}{L} \approx 3 \frac{H}{L} \quad (1.8)$$

De acuerdo con la teoría de Stokes sobre las olas, la pendiente límite, para que no rompa la ola, es de 1/7. Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, resultará que la velocidad media máxima de una partícula será de aproximadamente unos 3/7 la velocidad de la ola. De lo anterior se desprende que la altura de la ola es siempre muy inferior a su longitud.

1.5 Altura de la ola significativa

Si se registran las alturas de las olas en una zona y durante un tiempo determinados, se observará una diversidad importante de valores. Para indicar la altura de la ola representativa de este estado de la mar se toma un valor estadístico denominado altura de la ola significativa, $H_{1/3}$, que es la media aritmética de las alturas del tercio de las olas de mayor altura registradas. Hay que indicar que no se puede establecer una relación que permita hallar la altura máxima de la ola, H_{\max} , a partir de la altura de la ola significativa.

1.6 Velocidad y período de encuentro

Aquí se presenta un problema para resolver a bordo, como es relacionar la velocidad y el período de encuentro entre un buque navegando y las olas.

1.6.1 Velocidad de encuentro de la ola

El cálculo de la velocidad de encuentro se tratará como un problemas de móviles, (Fig. 1.7), siendo ésta igual a,

$$V_e = V_w + V_b \cdot \cos \alpha \quad (1.9)$$

En la que:

V_e velocidad de encuentro
 V_w velocidad de la ola

V_b velocidad del buque
 α ángulo entre la ola y la línea popa-proa del buque, que se toma como eje x positivo

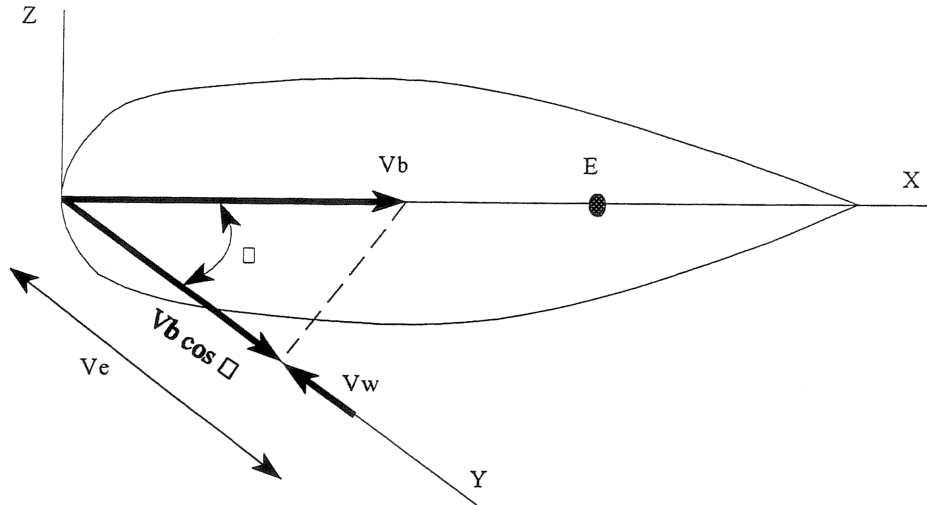


Fig. 1.7 Velocidad de encuentro

El término $V_b \cdot \cos \alpha$, será positivo cuando α esté en el primer o cuarto cuadrante (mar por la amura), y negativo cuando α esté en el segundo o tercer cuadrante (mar por la aleta).

1.6.2 Período de encuentro de la ola

Se va a establecer la relación entre los períodos de la ola y de encuentro, en base a las velocidades de la ola y de encuentro correspondientes.

Dado que,

$$V_w = \frac{L}{T} \quad (1.10)$$

será

$$T = \frac{L}{V_w} \quad (1.11)$$

En consecuencia

$$T_e = \frac{L}{V_e} \quad (1.12)$$

En las que:

L longitud de la ola
 V_w y V_e velocidades de la ola y de encuentro
 T y T_e períodos de la ola y de encuentro

Sustituyendo en la ecuación anterior la velocidad de encuentro por su valor de la ecuación 1.9, y poniendo la longitud en función del período y la velocidad de la ola, resultará,

$$T_e = \frac{V_w \cdot T}{V_w + V_b \cdot \cos \alpha} \quad (1.13)$$

Despejando T, se obtendrá la ecuación del período de la ola,

$$T = \frac{T_e (V_w + V_b \cdot \cos \alpha)}{V_w} \quad (1.14)$$

A efectos de a bordo, el período de encuentro, T_e , se puede obtener prácticamente midiendo el tiempo que transcurre desde que pasa una cresta por un punto cualquiera del buque, por ejemplo el E, (Fig. 1.7), hasta que pasa la siguiente cresta por el mismo punto.

1.7 Formación de las olas generadas por el viento

Se va a realizar una breve descripción de la formación de las olas por el viento a través de una serie de subapartados, de manera que el contenido de cada uno de ellos englobe los conceptos básicos que ayuden a su comprensión.

Bajo este planteamiento, no se entra en la problemática físico-matemática que existe para demostrar la generación de las olas de viento. Tampoco el tema es uno de los objetivos de este libro. Por ello, y de acuerdo con el enunciado, se comentará la formación de las olas; introduciendo la definición de las mismas como un transporte de energía, explicando la evolución de la ola capilar a la de gravedad, y exponiendo las formas más generalizadas de transmisión de energía del viento a la ola. Así se llega a la ola desarrollada en la que existe equilibrio entre la energía ganada y desgastada. Finalmente, y a través de las tradicionales escalas de Beaufort y Douglas, tan próximas a los marinos, se relaciona el viento con el estado de la mar.

a) Introducción

El viento es causa de perturbación de la superficie libre de la mar provocando olas. La perturbación creada dependerá de la intensidad o fuerza del viento, de su duración y de la extensión de la superficie libre de la mar sobre la que sopla, denominada fetch. Estos tres parámetros, fuerza, duración y fetch, definen la perturbación y, en consecuencia, las características de las olas. Sin embargo, no se conoce con precisión el mecanismo por el cual se transfiere la energía del viento a la ola.

A través de la energía se puede definir a la ola de gravedad de la superficie libre de la mar como el movimiento oscilatorio que transporta energía sin que se produzca un transporte significativo de masa. Las olas de gravedad, al igual que otros tipos de olas, resultan del balance entre las energías cinética y potencial.

b) Generación de las olas por el viento

Al soplar una ligera ventolina sobre la superficie libre de la mar, supuesta ésta en una posición de reposo o calma, las olas que aparecerán serán capilares. A esta rugosidad de la superficie libre de la mar se le opone la resistencia de la tensión superficial. Si esta ventolina desaparece, la superficie de la mar volverá rápidamente a su posición de equilibrio inicial, esto es, mar calma. De otro modo, si aumenta la intensidad del viento y tiene la duración suficiente, las olas se convertirán en olas de gravedad. Éstas continuarán trasladándose aunque cese el viento. Vemos, pues, dos diferencias importantes entre los dos tipos de olas: la longitud y la duración de las olas de gravedad frente a las olas capilares.

c) Aproximación a la transmisión de energía del viento a la ola

Se va a realizar una aproximación a la transmisión de energía del viento a la ola, exponiendo tres formas diferentes y complementarias de transmisión, siendo la primera de ellas la de mayor efectividad cuantitativa.

c.1) Las olas pueden obtener energía del empuje del viento si su velocidad de propagación es inferior a la de este último. La efectividad de la transmisión de energía por empuje dependerá del ángulo de incidencia del viento con la pendiente de la ola. Mientras que el viento ceda energía a la ola, ésta seguirá creciendo. Este proceso físico continuará hasta que las limitaciones de estabilidad de la ola lo permitan.

c.2) Otra manera de transferir la energía a las olas es la debida a la fricción del viento sobre la superficie libre de la mar. El efecto de la fricción varía de la cresta al seno. Las partículas de agua que forman la cresta de la ola se mueven en el mismo sentido que ésta y que el viento. En consecuencia, el arrastre por fricción acelera el movimiento de giro de estas partículas. Las partículas que están en el seno se mueven en sentido opuesto a la ola y por tanto al viento, produciendo el arrastre por fricción una disminución de su velocidad (aceleración negativa).

A diferencia del caso anterior, empuje del viento sobre la ola, la fricción puede transmitir energía a las olas aún en el caso de que la velocidad de propagación de las mismas sea mayor que la del viento, puesto que son las partículas las que reciben el efecto acelerador o desacelerador de la fricción, y éstas se mueven a una velocidad mucho menor que la del perfil de la ola.

c.3) La tercera vía por la cual las olas obtienen energía del viento es por la diferencia de presiones del aire entre las pendientes del perfil de la ola, anterior y posterior de la cresta. Se produce una sobrepresión en la pendiente anterior y una depresión en la posterior.

En la figura 1.8 se muestran las líneas de corriente del aire y el movimiento de las partículas de agua en la cresta y en el seno de la ola, y se identifican los tres modos de transmisión de la energía.

d) Olas desarrolladas

Suponiendo que el viento sople a una velocidad constante y durante el tiempo necesario, llegará un

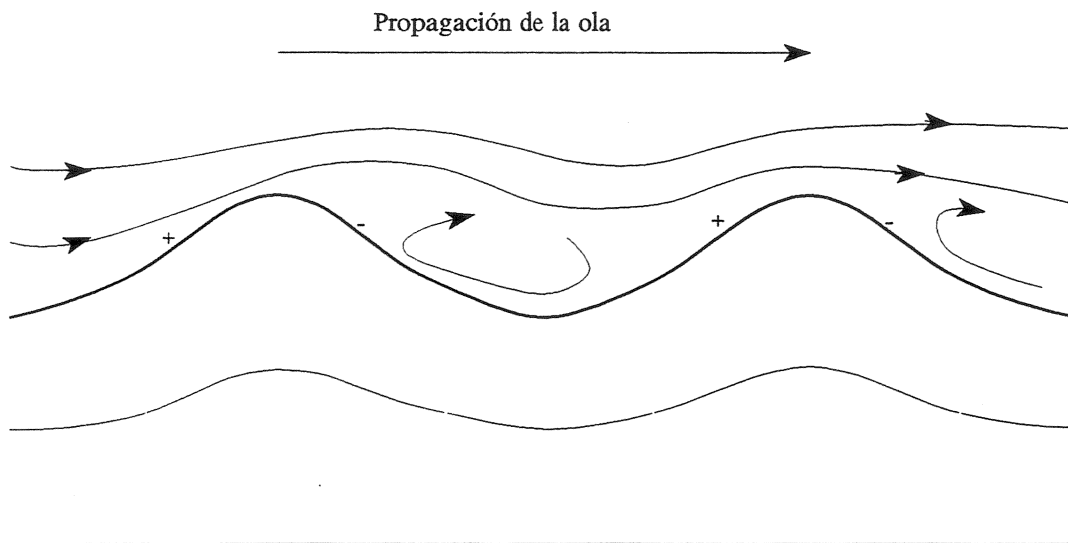


Fig. 1.8 Transmisión de energía del viento a la ola

momento en que existirán unas olas desarrolladas, alcanzándose el equilibrio entre la energía añadida que va recibiendo y la pérdida de la misma. En esta situación las características de la ola no variarán.

La pérdida de energía de las olas en mar libre se produce principalmente por los movimientos turbulentos del agua, (debidos, por ejemplo, a que la ola rompa), y en menor medida por la viscosidad.

e) Relación viento-olas

Una vez vista la vinculación que existe entre el viento y las olas de la superficie libre de la mar, queda por establecer la relación entre ellas.

Cada uno de los fenómenos, viento y mar, se mide con una escala. Las escalas con las que tradicionalmente se miden la fuerza del viento y el estado de la mar son las de Beaufort y Douglas, respectivamente. La descripción general de las mismas es que constan de una graduación, de los nombres de cada grado y de la valoración correspondiente, que para el viento será la velocidad y la altura de las olas para la mar. En la escala de la mar se incluye, además, la descripción de cada tipo de oleaje.

De esta manera, a partir de una fuerza del viento sostenida, se puede estimar su correspondiente mar desarrollada y estable. Para ello se utiliza la tabla 1.1 en la que se relacionan las dos escalas. Las velocidades del viento están en metros por segundo, y la altura de las olas, en metros, es la altura de la ola significativa, $H_{1/3}$, cuya definición se ha visto en el apartado 1.5. En la tabla no se ha incorporado la descripción de los diferentes estados de la mar, ya que no se ha considerado interesante para el temario de este libro.

Tabla 1.1 Escalas de Beaufort y Douglas

ESCALA DE BEAUFORT			ESCALA DE DOUGLAS		
Grado	Nombre	Velocidad viento m/s	Grado	Nombre	$H_{1/3}$ m
0	Calma	0,0 - 0,2	0	Calma	0
1	Ventolina	0,3 - 1,5	1	Llana	0,1 - 0,2
2	Flojito	1,6 - 3,3	2	Rizada	0,3 - 0,5
3	Flojo	3,4 - 5,4			0,6 - 1,0
4	Bonancible	5,5 - 7,9	3	Marejadilla	1,5
5	Fresquito	8,0 - 10,7	4	Marejada	2,0
6	Fresco	10,8 - 13,8	5	Gruesa	3,5
7	Frescachón	13,9 - 17,1	6	Muy gruesa	5,0
8	Duro	17,2 - 20,7			7,5
9	Muy duro	20,8 - 24,4	7	Arbolada	9,5
10	Temporal	24,5 - 28,4	8	Montañosa	12,0
11	Borrasca	28,5 - 32,7	9	Confusa	15,0
12	Huracán	> 32,7			> 15

1.8 Olas regulares e irregulares

En el apartado 1.1 ya se ha hecho referencia a las olas regulares e irregulares de la mar, dejando que los correspondientes significados fuesen comprendidos intuitivamente. En este apartado se van a definir brevemente estos dos tipos de olas.

Las olas regulares son aquellas que no cambian ni su tamaño ni su forma con el tiempo. En consecuencia, las olas que pasen por un mismo punto del espacio serán exactamente iguales.

Sin embargo, lo normal es que ocurra justo lo contrario, es decir, que las olas de la mar sean irregulares en el tiempo y en el espacio. Por lo tanto, su descripción real responde a valores aleatorios de las características. Esto es así porque, a su vez, el viento que las genera no es de intensidad constante, estando sujeto a rachas que se manifiestan en esta irregularidad de la mar.

Lo que también ocurre dentro de esta irregularidad es que, en un punto cualquiera del espacio, la mar

presenta un modelo formado por un tren de olas irregulares, que se va repitiendo durante un cierto período de tiempo, normalmente corto, y que le da una apariencia de uniformidad.

Una vez formadas las olas se trasladarán sobre la superficie de la mar, fuera de la zona de generación, hasta que se agote su energía. Estas olas, no sujetas ya al viento que las originó, van suavizando sus formas, lo que se manifiesta en unas crestas redondeadas y en menores variaciones de alturas entre crestas sucesivas, presentando, por tanto, una mayor uniformidad. A la mar que tiene estas características se la denomina mar tendida o mar de fondo.

1.9 Introducción al estudio teórico de las olas de gravedad

Tal como se ha visto en el apartado anterior, los esfuerzos de viscosidad tienen importancia en la generación de las olas por el viento. Sin embargo, en el estudio teórico resulta útil no considerar sus efectos, obteniéndose con este supuesto una acotación de orden práctico en la complejidad matemática de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

El estudio teórico de las olas de gravedad se basa en las hipótesis de que el agua de la mar sea un fluido ideal, incompresible y no viscoso, y en que los movimientos de las olas sean lo suficientemente lentos como para permitir linealizar sus efectos.

1.10 Potencial de velocidad de las olas regulares de gravedad

Si el movimiento de un fluido es irrotacional, el vector velocidad \vec{u} de las partículas se puede representar por el gradiente de un potencial escalar ϕ , que dependerá de las tres coordenadas del punto en el espacio (x , y , z) y del tiempo (t). Tendremos, entonces, un potencial de velocidad.

Como aproximación al concepto de irrotacional, se presenta el ejemplo de una partícula esférica. Al analizar las fuerzas que actúan sobre la misma, siendo el fluido no viscoso e incompresible y estando en situación de reposo, se establecerán las condiciones siguientes:

- a) Debido a ser el fluido no viscoso, las fuerzas de superficie actúan perpendicularmente a la superficie de la esfera, pasando sus líneas de acción a través del centro de la misma. Estas fuerzas, por tanto, convergerán en el centro geométrico de la esfera, que será su punto de aplicación.
- b) A su vez, el centro de gravedad de las fuerzas de masa de la partícula será, también, el centro geométrico de la esfera.

Al tener los dos conjuntos de fuerzas el mismo punto de aplicación, no habrá brazo y, por tanto, no habrá par de fuerzas sobre la partícula. En consecuencia, no puede generarse rotación. En el caso contrario, si la partícula tiene rotación inicial, al no haber par, no se podrá modificar su movimiento rotacional.

De hecho el potencial de velocidad es una abstracción matemática que permite sustituir las tres incógnitas escalares, u_1 , u_2 , u_3 , del vector velocidad \vec{u} por tres nuevas componentes escalares, en

las cuales el potencial, ϕ , queda como única incógnita. Esto facilita su obtención y, una vez conocido, permitirá calcular las tres componentes de la velocidad.

En el planteamiento de la teoría potencial se puede utilizar o el método de Lagrange o el de Euler. En realidad se hace uso de éste último. En síntesis, el método de Lagrange consiste en seguir la trayectoria descrita por una partícula determinada, mientras que en el método de Euler se identifica un punto en el espacio y se estudia la evolución de los parámetros de las partículas que irán ocupando dicho punto. El método de Lagrange aporta mayor información, pero el método de Euler da las variables suficientes para el desarrollo de la teoría potencial, simplificando su solución.

1.11 Teoría potencial de las olas regulares

En el desarrollo de la teoría potencial se utiliza la aproximación Euleriana, definiendo para ello un punto fijo en el espacio $\vec{x}(x, y, z)$ sobre un sistema de coordenadas rectangular, siendo la velocidad de las partículas de agua $\vec{u}(x, y, z, t)$ una función del tiempo (t). Los tres componentes del vector velocidad \vec{u} , paralelos a los tres ejes del sistema de coordenadas, son u_1, u_2, u_3 . Si se supone que el fluido es irrotacional, se tiene que,

$$\text{rot } \vec{q} = 0$$

$\text{rot } \vec{q}$ rotación del fluido

Esto permite representar el vector de la velocidad \vec{u} por un gradiente del potencial de la velocidad,

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.15)$$

$$\vec{u} = \nabla \phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \quad (1.16)$$

\vec{u}	vector velocidad de la partícula de fluido
u_i	velocidades escalares de la partícula
ϕ	potencial de velocidad
∇	vector nabla
$\nabla \phi$	gradiente del potencial de la velocidad

a) *Ecuación de continuidad*

La ecuación de continuidad es consecuencia del principio de conservación de la masa, el cual establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo. Su expresión es:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (1.17)$$

b) *Ecuación de Laplace*

Al sustituir las ecuaciones 1.15 en la ecuación de continuidad 1.17, se obtendrá,

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.18)$$

Siendo ésta la ecuación de Laplace, la cual expresa la conservación de la masa para un flujo potencial.

La ecuación de Laplace tiene un número infinito de soluciones. El problema consistirá, por tanto, en determinar unas condiciones, denominadas condiciones de contorno o de frontera, a fin de obtener una función que sea una solución propia del flujo en estudio.

c) *Ecuación de Bernoulli*

La ecuación de Bernoulli puesta en función del potencial es,

$$-\frac{p}{\gamma} = g \cdot z + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [\nabla \phi]^2 + C(t) \quad (1.19)$$

$$-p = \gamma \cdot g \cdot z + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma [\nabla \phi]^2 + C(t) \quad (1.20)$$

p presión total
 γ densidad del agua

g	aceleración de la gravedad
z	altura de la columna de agua, (positiva hacia arriba)
$C(t)$	función arbitraria dependiente del tiempo, (por ejemplo cero o un valor igual a la presión atmosférica)

$C(t)$ puede eliminarse redefiniendo para ello el potencial ϕ ,

$$\phi' = \phi - \int^t C(t) dt \quad (1.21)$$

En la ecuación anterior se observa que la diferencia entre los dos potenciales ϕ' y ϕ es función del tiempo, con lo cual el gradiente no queda afectado, es decir,

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi'}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

Volviendo a la ecuación 1.20, el primer término del segundo miembro es la contribución hidrostática,

$$\gamma \cdot g \cdot z = \text{presión hidrostática} \quad (1.23)$$

siendo el incremento de la presión con la profundidad.

El resto de los términos de este segundo miembro, son la contribución hidrodinámica,

$$\gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma [\nabla \phi]^2 + C(t) = \text{presión hidrodinámica} \quad (1.24)$$

indicando que la presión aumenta al disminuir la velocidad.

La ecuación de Bernoulli permite, pues, calcular la presión total a partir del potencial de velocidad de las partículas del fluido o al contrario, a partir del potencial calcular la presión total.

d) Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno necesarias para definir y acotar una solución de la ecuación de Laplace, son la superficie de separación entre el agua y el aire, a la que se ha denominado superficie libre, y la superficie mojada de un sólido impermeable, en este caso el fondo del mar. Sobre estas dos superficies el fluido se escurre tangencialmente. A su vez, la naturaleza física de una superficie libre requiere dos condiciones: la cinemática y la dinámica de conservación de fuerzas.

En las ecuaciones linealizadas de las condiciones de contorno que se darán a continuación, se supone que el fluido es ideal, tal y como ya se ha establecido en el apartado 1.9, y que la longitud de la ola es suficientemente grande para que la tensión superficial no sea importante. Se linealizan los

resultados despreciándose los términos de segundo orden o mayores de la amplitud de la ola y de los movimientos asociados al fluido.

La elevación vertical de una partícula cualquiera de la superficie libre de la ola bidimensional sobre el nivel de la mar en calma, queda definida por la función,

$$z = \eta (x, t) \quad (1.25)$$

d.1) Condición de contorno cinemática

La condición de contorno cinemática define que las velocidades verticales de la superficie del contorno y del fluido deben ser iguales. La ecuación linealizada, y por tanto aproximada, que expresa esta condición, es la siguiente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.26)$$

Es decir, la elevación vertical de una partícula de la superficie libre de la ola con respecto al tiempo, es igual a su velocidad vertical.

d.2) Condición de contorno dinámica

La condición de contorno dinámica indica que la presión de la superficie libre de la mar debe ser la presión atmosférica. Su ecuación se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli en función del potencial, (Ec. 1.20), en la que el término complementario $C(t)$ se toma igual a,

$$C(t) = -p_a$$

p_a presión atmosférica

quedando, en consecuencia, de la siguiente manera,

$$-p = \gamma \cdot g \cdot z + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma [\nabla \phi]^2 - p_a \quad (1.27)$$

Dado que la presión de la superficie libre de la mar debe ser la atmosférica,

$$-p + p_a = 0$$

Por tanto, el resto de los términos del segundo miembro de la ecuación 1.27, serán iguales a cero,

$$g \cdot z + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [\nabla \phi]^2 = 0 \quad (1.28)$$

en la que se ha eliminado la densidad del agua.

Sustituyendo la ordenada vertical z por el valor η , (Ec. 1.25),

$$g \cdot \eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [\nabla \phi]^2 = 0$$

despejando y resolviendo para η , se obtendrá,

$$\eta = - \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [\nabla \phi]^2 \right]$$

Si se desprecia el término de segundo orden, se tendrá finalmente la ecuación linealizada de la elevación vertical de una partícula de la superficie libre de la ola sobre el nivel del agua en calma,

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.29)$$

e) Condición de contorno de la superficie libre de la ola

A partir de las ecuaciones de contorno cinemática y dinámica se va a obtener una única condición de frontera. Para ello se diferencia la ecuación 1.29 con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Sustituyendo en la ecuación 1.26,

$$- \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

se obtendrá la ecuación de contorno cinemática y dinámica o condición de la superficie libre de la ola,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (1.31)$$

f) Ola plana progresiva

Una solución de la condición de contorno de la superficie libre, (Ec. 1.31), es la ola sinusoidal, denominada ola plana progresiva, del tipo

$$\eta(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (1.32)$$

η	elevación de la superficie libre de la ola
x	eje longitudinal, positivo en el sentido de la propagación de la ola, siendo $x = 0$ en el origen de la misma
t	tiempo
A	amplitud de la ola
k	número de ola
ω	frecuencia en radianes

De la ecuación de la ola plana progresiva se obtienen dos soluciones, una para aguas de profundidad infinita, que es un término relativo en este caso, ya que se toman como tales aquellas que no tienen influencia sobre la ola, y la otra solución es para el caso de aguas de profundidad finita o limitada con influencia sobre la ola, y en la que deberá determinarse previamente la condición de contorno del fondo.

g) Potencial de velocidad para aguas de profundidad infinita

La solución derivada de la ecuación 1.32 para obtener el potencial de velocidad de una partícula de la superficie libre de la ola en aguas de profundidad ilimitada debe satisfacer, entre otras, la ecuación de Laplace. Al igual que la ecuación de la ola plana progresiva, la ecuación de este potencial es sinusoidal en el tiempo,

$$\phi = \frac{g \cdot A}{\omega} e^{k \cdot z} \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (1.33)$$

Para que esta ecuación del potencial dé una solución válida debe cumplir también con las condiciones de contorno cinemática y dinámica de la superficie libre de la ola, (Ec. 1.31). Una consecuencia de ello es la obligada relación que se establece entre el número de ola y la frecuencia, denominada relación de dispersión, siendo ésta,

$$k = \frac{\omega^2}{g} \quad (1.34)$$

De esta relación de dispersión y de las ecuaciones 1.1 y 1.6 del apartado 1.4 en el que se definen las características de las olas y se establecen unas relaciones básicas, se obtiene una ecuación de la velocidad de propagación de la ola, muy interesante para los marinos dada su utilidad.

En la ecuación 1.6 se llegó a la relación siguiente,

$$V_w = \frac{\omega}{k}$$

Sustituyendo ω por la relación de dispersión,

$$\omega = (k \cdot g)^{1/2}$$

$$V_w = \frac{(k \cdot g)^{1/2}}{k} = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \quad (1.35)$$

Finalmente, y de acuerdo con la relación entre el número de ola y la longitud de la misma, (Ec. 1.11),

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Se obtendrá la conocida ecuación para el cálculo de la velocidad de propagación de la ola,

$$V_w = \left(\frac{g \cdot L}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (1.36)$$

h) Potencial de la ola para aguas de profundidad finita

La obtención del potencial de velocidad para aguas de profundidad finita requiere considerar una condición de contorno más: el fondo. Supuesto éste a una profundidad constante, (-h), e impermeable al agua, la condición de contorno del fondo a imponer indicará que el gradiente vertical del potencial en la frontera será igual a cero, esto es,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = -h \quad (1.37)$$

La ecuación del potencial de velocidad en aguas de profundidad finita o limitada es de la forma siguiente:

$$\phi = \frac{g \cdot A}{\omega} \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh k \cdot h} \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (1.38)$$

Al igual que en el caso anterior de aguas finitas, la solución de la ecuación debe satisfacer, también, las condiciones de contorno cinemática y dinámica de la superficie libre de la ola, (Ec. 1.31). La relación de dispersión que se deriva de ello es, en este caso,

$$k \cdot \tanh k \cdot h = \frac{\omega^2}{g} \quad (1.39)$$

Sustituyendo en la ecuación 1.6,

$$V_w = \frac{\omega}{k}$$

la frecuencia ω por el valor obtenido a partir de la ecuación anterior de dispersión,

$$\begin{aligned} \omega &= (g \cdot k \tanh k \cdot h)^{1/2} \\ V_w &= \left(\frac{g}{k} \tanh k \cdot h \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dado que, (Ec. 1.1),

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{L} \\ V_w &= \left(\frac{g \cdot L}{2\pi} \tanh \frac{2\pi \cdot h}{L} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.41)$$

siendo ésta la ecuación que relaciona la velocidad de la ola con su longitud, para una profundidad finita de agua.

Si en la ecuación anterior se considera que,

$$\frac{2\pi \cdot h}{L} \gg 1$$

lo cual significa que la profundidad es grande con respecto a la longitud de la ola, la tangente hiperbólica tenderá a uno,

$$\tanh \frac{2\pi \cdot h}{L} \rightarrow 1$$

y, por tanto, la ecuación 1.41 se irá aproximando a la forma de la ecuación 1.36,

$$V_w \approx \left(\frac{g \cdot L}{2\pi} \right)^{1/2}$$

En ambas ecuaciones, 1.36 y 1.41, la velocidad de la ola depende de su longitud, siendo, por tanto, olas dispersivas, es decir, las olas más largas viajan más rápidamente que las olas más cortas. En la práctica, para una profundidad

$$h > \frac{1}{2} L$$

Las velocidades de traslación para longitudes de olas iguales serán sensiblemente iguales al ser calculadas por las ecuaciones de profundidad infinita y finita, (Ecs. 1.36 y 1.41).

En el caso de que,

$$\frac{2\pi \cdot h}{L} \ll 1$$

se tendrá una profundidad del agua muy pequeña, y la tangente hiperbólica tenderá al valor,

$$\tanh \frac{2\pi \cdot h}{L} \rightarrow \frac{2\pi \cdot h}{L}$$

En consecuencia, la ecuación 1.41 tenderá a.

$$V_w \approx (g \cdot h)^{1/2} \quad (1.42)$$

Esta ecuación indica que para aguas de muy poca profundidad, la velocidad de las olas depende de ésta, consecuentemente, serán olas no dispersivas, ya que olas de distintas características se desplazan a la misma velocidad.

i) Velocidad de grupo

El movimiento de la superficie libre de la mar producido por una perturbación en una zona determinada, da generalmente como resultado un modelo heterogéneo que cambia constantemente con el tiempo, consecuencia de la superposición de olas de diferentes longitudes y períodos, siendo, por tanto, dispersivas, las más largas viajando más rápidamente que las más cortas. Estas olas llegarán en grupos a zonas fuera del área afectada directamente por la perturbación, pudiéndose considerar que sus características son las correspondientes a las olas planas progresivas, teniendo longitudes y períodos de valores próximos.

Esta última circunstancia puede ilustrarse poniendo como ejemplo un grupo formado por dos olas planas progresivas, de características,

$$L_1 = \frac{2\pi}{k_1} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$L_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi}{k_1 + \delta k} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_1 + \delta \omega}$$

y cuyas ecuaciones son,

$$\eta_1(x, t) = A \cdot \cos(k_1 \cdot x - \omega_1 \cdot t)$$

$$\eta_2(x, t) = A \cdot \cos(k_2 \cdot x - \omega_2 \cdot t)$$

$$\eta_2(x, t) = A \cdot \cos[(k_1 + \delta k) \cdot x - (\omega_1 + \delta \omega) \cdot t]$$

siendo δk y $\delta \omega$ valores pequeños.

La figura 1.9 indica la superposición de dos olas planas progresivas de longitudes próximas, destacando una variación de la amplitud del grupo, inscrita en las líneas discontinuas de forma sinusoidal, teniendo mayor amplitud en el centro del grupo y disminuyendo hacia los extremos. La velocidad de avance del grupo, V_g , será,

$$V_g = \frac{\delta \omega}{\delta k} \quad (1.43)$$

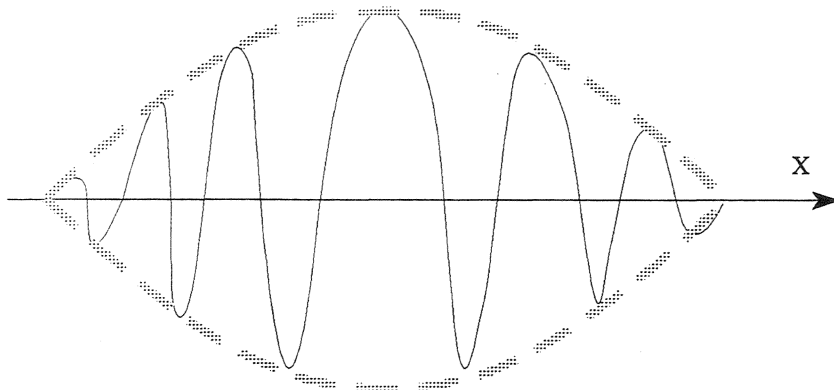


Fig. 1.9 Grupos de olas

en la que,

$$\delta \omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\delta k = k_2 - k_1$$

Cuando,

$$\delta \omega \rightarrow 0 \quad \delta k \rightarrow 0$$

la velocidad de grupo será la relación entre las derivadas de la frecuencia y del número de ola,

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.44)$$

Derivando la ecuación 1.34 de la relación de dispersión para aguas de profundidad infinita, y sustituyendo el valor obtenido en la ecuación 1.44 anterior, se obtendrá la velocidad de grupo en función de la velocidad de la ola.

$$k = \frac{\omega^2}{g}$$

$$\omega = (k \cdot g)^{1/2}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = g^{1/2} \cdot \frac{1}{2} k^{-1/2}$$

$$V_g = \frac{1}{2} \frac{g^{1/2}}{k^{1/2}}$$

$$g^{1/2} = \frac{\omega}{k^{1/2}}$$

$$V_w = \frac{\omega}{k}$$

$$V_g = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} V_w \quad (1.45)$$

Por tanto, la velocidad de grupo es igual a la mitad de la velocidad de la ola en el caso de aguas profundas, las cuales deben interpretarse de acuerdo con el significado que se ha expuesto de forma repetida.

Por un procedimiento análogo, aunque algo más complejo, que se desarrollará a continuación, se obtiene la velocidad de grupo en función de la velocidad de la ola para aguas de profundidad finita. El planteamiento a seguir consiste en derivar la ecuación de la relación de dispersión, (Ec. 1.39), y la sustitución consiguiente en la ecuación de la velocidad de grupo, (Ec. 1.44).

Se inicia la deducción recordando las dos ecuaciones mencionadas, velocidad de grupo y relación de dispersión para aguas de profundidad finita,

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\frac{\omega^2}{g} = k \cdot \tanh k \cdot h$$

Despejando la frecuencia, ω , en esta última,

$$\omega = [g \cdot k \cdot \tanh k \cdot h]^{1/2}$$

y derivando ω con respecto a k , número de ola, se tendrá,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= \frac{1}{2} g^{1/2} \cdot k^{-1/2} (\tanh k \cdot h)^{1/2} + \\ &+ g^{1/2} \cdot k^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \frac{h}{(\cosh^2 k \cdot h) \cdot (\tanh k \cdot h)^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Para poner el primer término del segundo miembro en función de la velocidad de la ola, se procederá de la forma siguiente,

$$V_w = \frac{\omega}{k} = \frac{(g \cdot k \cdot \tanh k \cdot h)^{1/2}}{k}$$

$$V_w = g^{1/2} \cdot k^{-1/2} (\tanh k \cdot h)^{1/2}$$

Sustituyendo en la ecuación 1.46, quedará,

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} V_w + g^{1/2} \cdot k^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \frac{h}{(\cosh^2 k \cdot h) \cdot (\tanh k \cdot h)^{1/2}}$$

A continuación se harán los cambios oportunos en el segundo término del segundo miembro de la derivada, (Ec. 1.46), para ponerlo también en función de la velocidad de la ola.

De la relación de dispersión se obtendrá $g^{1/2}$,

$$g^{1/2} = \frac{\omega}{k^{1/2} \cdot (\tanh k \cdot h)^{1/2}}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.46,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= \frac{1}{2} V_w + \frac{1}{2} \frac{k^{1/2} \cdot h \cdot \omega}{k^{1/2} \cdot (\tanh k \cdot h)^{1/2} \cdot (\cosh^2 k \cdot h) \cdot (\tanh k \cdot h)^{1/2}} \\ \frac{d\omega}{dk} &= \frac{1}{2} V_w + \frac{1}{2} \frac{h \cdot \omega}{(\tanh k \cdot h) \cdot (\cosh^2 k \cdot h)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, (Ec. 1.6),

$$\omega = V_w \cdot k$$

y sustituyendo la frecuencia por este valor,

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} V_w + \frac{V_w \cdot k \cdot h}{2 (\sinh k \cdot h) \cdot (\cosh k \cdot h)}$$

Finalmente, la ecuación de la velocidad de grupo será,

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} V_w + V_w \frac{k \cdot h}{(\sinh 2k \cdot h)}$$

$$V_g = V_w \left(\frac{1}{2} + \frac{k \cdot h}{(\sinh 2k \cdot h)} \right) \quad (1.47)$$

Para valores altos de la profundidad h ,

$$\sinh 2k \cdot h \rightarrow \infty$$

$$\frac{k \cdot h}{\sinh 2k \cdot h} \rightarrow 0$$

Resultando la ecuación 1.45 a partir de la ecuación 1.47.

Por lo tanto y como ya se ha visto, para olas en aguas profundas se producirá la relación,

$$\frac{V_g}{V_w} = \frac{1}{2}$$

En el caso de olas en aguas de profundidad limitada, el seno hiperbólico de la ecuación 1.47 tenderá a su valor $2k \cdot h$,

$$\sinh 2k \cdot h \rightarrow 2k \cdot h$$

con lo cual el segundo término del segundo miembro tenderá a $1/2$,

$$\frac{k \cdot h}{\sinh 2k \cdot h} \rightarrow \frac{k \cdot h}{2k \cdot h} = \frac{1}{2}$$

Consecuentemente, la relación entre las velocidades de grupo y de la ola será la unidad,

$$\frac{V_g}{V_w} = 1$$

1.12 Teoría de la ola trocoidal

Franz Gerstner presentó en 1802 una teoría basada en una ola cuyo perfil tenía la forma de trocoide. La teoría trocoidal combina una representación geométrica relativamente adecuada y simple, con un tratamiento matemático sencillo, pero con limitaciones en su desarrollo. Ha sido ampliamente utilizada y sigue siéndolo en los estudios de estabilidad y movimiento del buque, y en los cálculos de la resistencia y los esfuerzos estructurales del casco.

1.13 Ola trocoidal

La cicloide reducida o trocoide es la curva descrita por un punto situado a una distancia r del centro de una circunferencia de radio R , a medida que ésta rueda sin resbalar sobre una recta XX_1 , (Fig. 1.10).

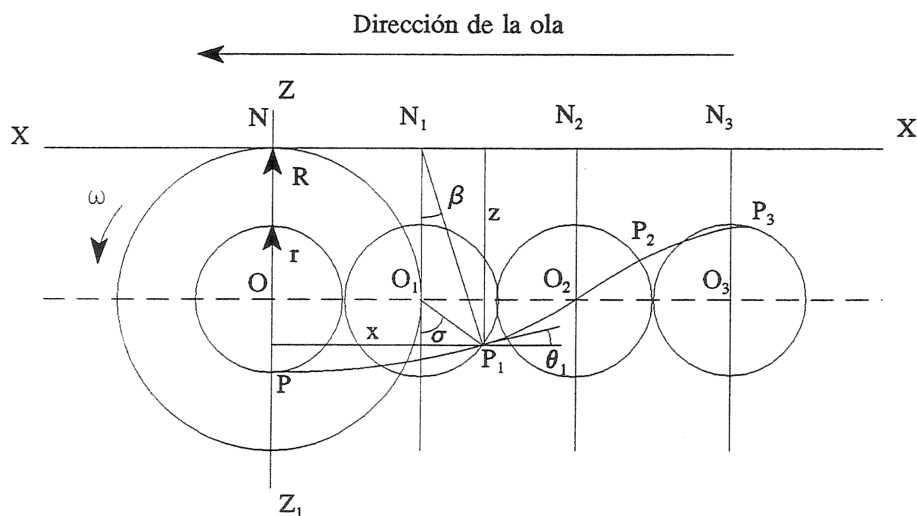


Fig. 1.10 Ola trocoidal

La altura H y la longitud L de la ola así formada, estarán relacionadas con los radios orbital y de la circunferencia, respectivamente, siendo,

$$H = 2r \quad (1.48)$$

$$L = 2\pi R \quad (1.49)$$

La figura 1.10 tiene una doble utilidad al dar por una parte el perfil de la ola en un instante cualquiera, y por la otra las posiciones que ocuparía una misma partícula en su movimiento orbital.

Considérese, en primer lugar, tal y como ya se ha definido, que el círculo rueda con una velocidad ω desplazándose en el sentido XX_1 . Los puntos P, P_1, P_2, P_3, \dots , representan el perfil de la ola trocoidal en el espacio para un mismo instante.

Sin embargo, en el caso de que el círculo ruede, pero sin desplazarse, de manera que el centro O se mantenga fijo en el espacio, tal y como aproximadamente sucede en la realidad, su circunferencia será el lugar geométrico de las distintas posiciones de una partícula, supuesta inicialmente en P , en su movimiento de giro alrededor del centro O . Haciendo referencia de nuevo a la figura 1.10, las circunferencias de centros O, O_1, O_2, O_3, \dots , representan la misma órbita inicial, con centro en O , pero situadas sobre un eje XX_1 de tiempo. En este caso, los puntos P, P_1, P_2, P_3, \dots , son las posiciones relativas que ocuparía la partícula, inicialmente en P , en los diferentes momentos de su movimiento orbital.

Este estudio permite indicar que el sentido del movimiento de la ola es al contrario que el imaginario del círculo utilizado para generar gráficamente la trocoide. También muestra que en la cresta de la ola las partículas se mueven en el mismo sentido que el perfil de la misma, mientras que en el seno se mueven en sentidos opuestos.

1.14 Ecuaciones paramétricas de la ola trocoidal

Tomando como ejes XX_1 y ZZ_1 , ambos indicando el sentido positivo de los mismos, (Fig. 1.10), las coordenadas de un punto $P_{x,z}$ supuesto, por ejemplo, en P_1 , serán:

$$x = R \cdot \sigma + r \cdot \text{sen } \sigma \quad (1.50)$$

$$x = \frac{L}{2\pi} \cdot \sigma + \frac{H}{2} \cdot \text{sen } \sigma$$

$$z = R + r \cdot \cos \sigma \quad (1.51)$$

$$z = \frac{L}{2\pi} + \frac{H}{2} \cdot \cos \sigma$$

en donde σ es el ángulo girado por el círculo de radio R .

Derivando las dos ecuaciones anteriores con respecto al ángulo σ , se tendrá,

$$\frac{dx}{d\sigma} = R + r \cdot \cos \sigma \quad (1.52)$$

$$\frac{dz}{d\sigma} = - r \cdot \sen \sigma \quad (1.53)$$

La tangente a la trocoide en P_1 , será igual a,

$$\tan \theta_1 = \frac{- dz}{dx} \quad (1.54)$$

(- dz) es negativo, ya que se ha tomado positivo de Z a Z_1 , hacia abajo. Sustituyendo por los valores de las ecuaciones 1.52 y 1.53,

$$\tan \theta_1 = \frac{r \cdot \sen \sigma}{R + r \cdot \cos \sigma} \quad (1.55)$$

También sobre la figura 1.10, se obtiene el valor del ángulo β , formado por N_1O_1 y N_1P_1 ,

$$\tan \beta = \frac{r \cdot \sen \sigma}{R + r \cdot \cos \sigma} \quad (1.56)$$

Luego,

$$\beta = \theta_1 \quad (1.57)$$

y N_1P_1 es normal a la tangente de la trocoide en P_1 , y, por lo tanto, a la curva trocoide en este mismo punto.

1.15 Geometría de la ola trocoidal

El perfil de la ola trocoidal se puede trazar a partir de dos de sus parámetros característicos, como son la longitud y la altura.

La explicación de cómo se traza el perfil de la ola trocoidal, se apoya en las figuras 1.11 y 1.12, cuyo seguimiento es necesario para su comprensión. Sobre una línea horizontal XX_1 , se toma el valor de la longitud, $L = 2\pi R$, y se divide en un número de partes iguales, (Figs. 1.11 y 1.12). Con centros en cada uno de estos puntos se trazan las circunferencias de radio igual a la mitad de la altura de la ola, $r = H/2$. También, a partir de cada uno de los centros de las órbitas, se trazan radios a ángulos constantes y sucesivos, siendo su valor igual a 360° dividido por el mismo número de partes. La

curva que une los extremos de los radios así definidos describe el perfil de la ola trocoidal.

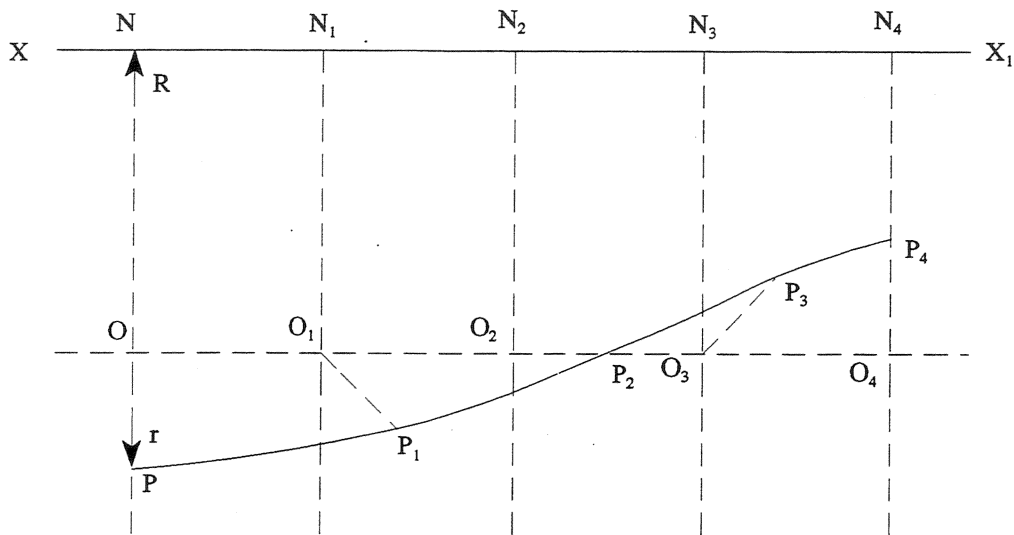


Fig. 1.11 Trazado del perfil de la ola trocoidal

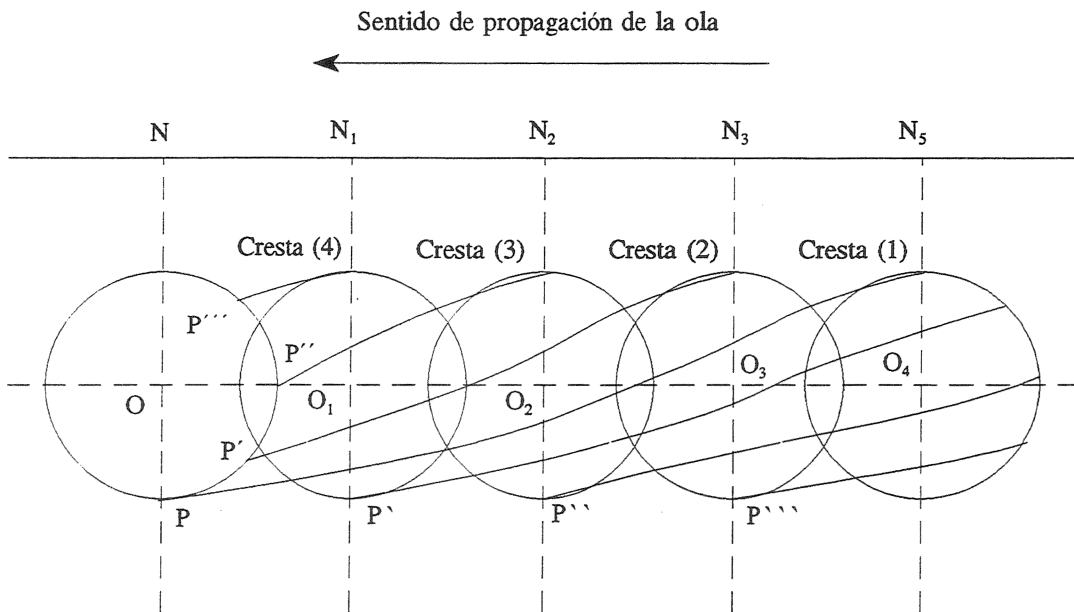


Fig. 1.12 Propagación de la ola trocoidal

Partiendo de las posiciones P, P', P'', P''', ..., de la órbita del centro O, se podrán trazar los distintos perfiles, en el tiempo, que irá ocupando la ola. En la figura 1.12 se observa que las crestas de cada uno de ellos se desplaza de X₁ a X, siendo éste el sentido de propagación de la ola.

1.16 Horizontales y verticales hidrodinámicas

En el apartado 1.3 se comentó que en aguas de profundidad infinita, los diámetros de las órbitas de las partículas de agua de las olas decrecen con la profundidad hasta que el movimiento desaparece. Por tanto, el movimiento ondulatorio se transmite a las capas inferiores, siendo una característica que las partículas describan sus órbitas con respecto a centros fijos a una velocidad constante ω .

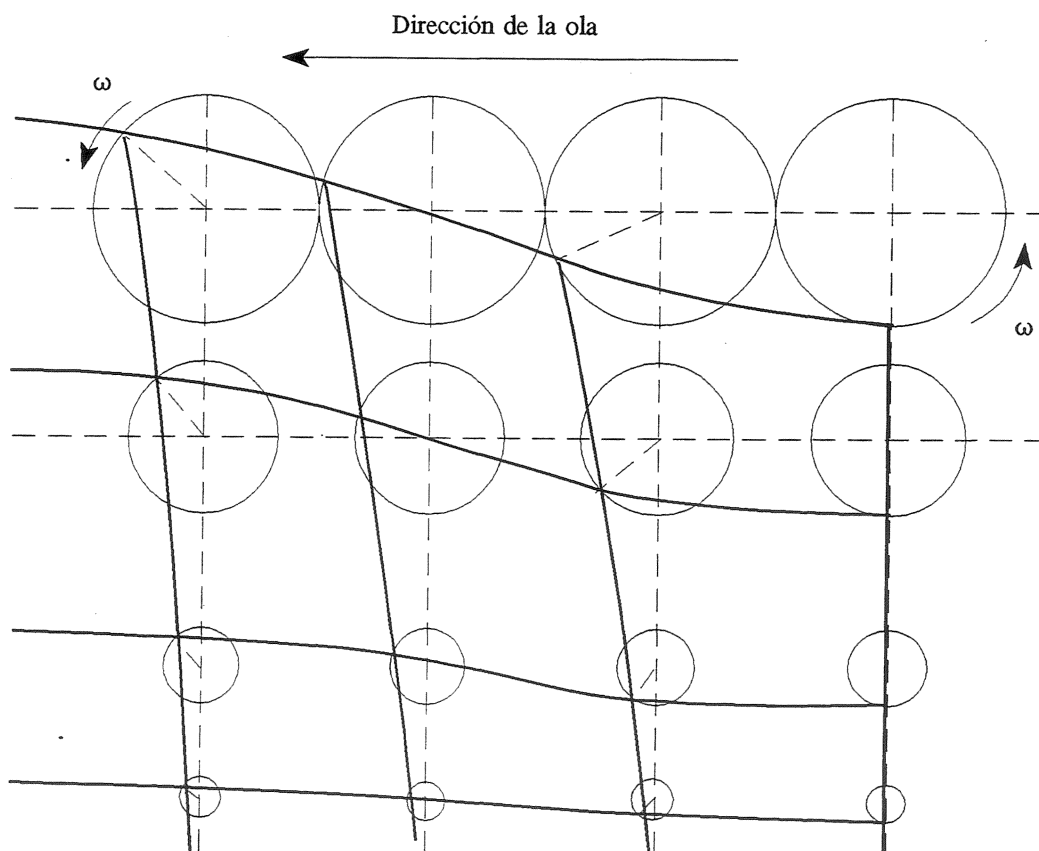


Fig. 1.13 Horizontales y verticales hidrodinámicas

En una línea horizontal cualquiera de centros de órbitas, los radios de las mismas son iguales pero

las fases de las partículas adyacentes varían de forma secuencial. Las distintas superficies de las olas seguirán siendo trocoidales, (Fig. 1.13), teniendo en común la misma longitud que la ola de la superficie libre, pero sus alturas disminuirán con la profundidad. Si bien teóricamente la ola se propagaría verticalmente hasta el infinito, se toma como límite una profundidad igual a la mitad de la longitud de la ola, por tanto, la superficie a este nivel será prácticamente un plano horizontal. Las superficies trocoidales consideradas se denominarán superficies horizontales hidrodinámicas.

Las moléculas de las olas que para la mar en calma se hallaban sobre una línea vertical, en el movimiento orbital tendrán simultáneamente la misma fase, por tanto, sus radios serán paralelos, decreciendo exponencialmente con la profundidad. Las líneas que unen estas moléculas son curvas que convergen hacia las crestas y divergen hacia los senos, variando de forma constantemente. Cuando las moléculas estén en la cresta o en el seno de las olas, estas líneas coincidirán con la vertical de los centros de las órbitas. De acuerdo con el concepto de ola bidimensional, transversalmente son idénticas, las superficies formadas por las moléculas de igual fase se denominan superficies verticales hidrodinámicas.

Tratándose de olas bidimensionales, se puede hablar indistintamente de superficies o de líneas horizontales y verticales hidrodinámicas.

2 Hidrodinámica de la ola trocoidal

2.1 Ola estacionaria

Imponiendo sobre cada partícula de una ola trocoidal una velocidad lineal igual y opuesta a la de la ola, y combinando con la velocidad orbital, la resultante hará que las partículas de agua fluyan en trayectorias trocoidales. Con ello se pasa de una ola cuyo perfil se traslada, ola progresiva, con las partículas describiendo órbitas, a una ola de forma fija con las partículas deslizándose por el perfil trocoidal, a la que se denomina ola estacionaria.

La velocidad lineal será igual, pero de signo contrario, a la velocidad de la ola y tendrá por valor,

$$V_w = \frac{L}{T} = \frac{2\pi \cdot R}{2\pi / \omega} = R \cdot \omega \quad (2.1)$$

La velocidad orbital de las partículas, u , puesta en función del radio r y de la frecuencia ω , utilizando para ello las ecuaciones 1.7 y 1.4, será,

$$u = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$u = r \cdot \omega \quad (2.2)$$

La velocidad resultante será tangente a la superficie trocoidal, (Fig. 2.1), tal y como se verá en el apartado siguiente.

Las condiciones hidrodinámicas del agua no cambian ya que el imponer una velocidad lineal no introduce aceleraciones y, por tanto, no hay modificaciones de las fuerzas.

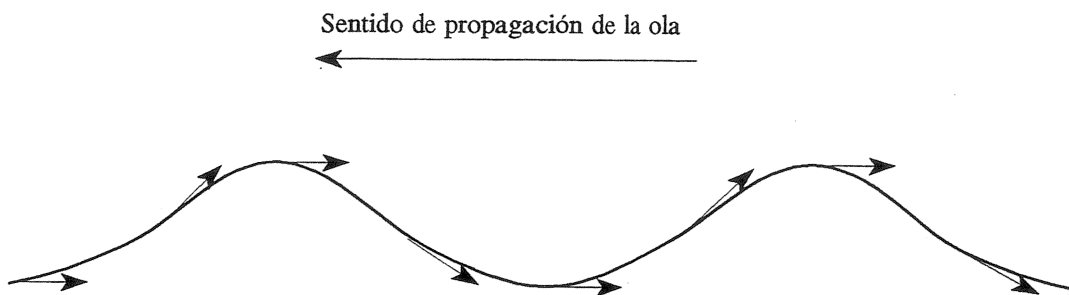


Fig. 2.1 Ola estacionaria

2.2 Triángulos de radios y de velocidades

En la figura 2.2, obtenida a partir de la figura 1.10, el triángulo ON_1P_1 de la ola trocoidal, triángulo geométrico de los radios, está formado por,

$$ON_1 = R \quad OP_1 = r \quad N_1P_1 = n_1$$

siendo R y r los radios de las circunferencias que engendran la trocoide, mientras que n_1 , denominado radio instantáneo, es normal a la trocoide, como se demostró en el apartado 1.14.

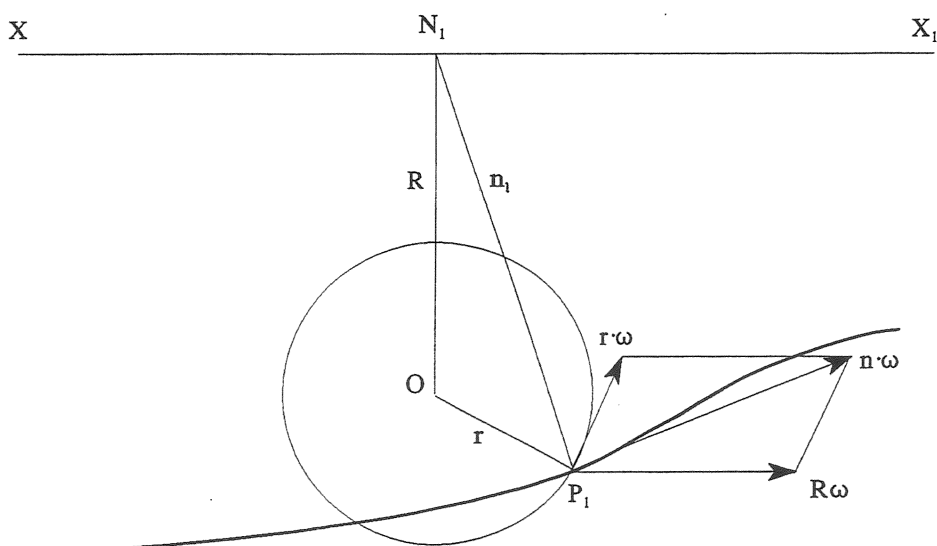


Fig. 2.2 Triángulos de radios y de velocidades

El triángulo de velocidades sobre la partícula P_1 tiene por lados los vectores de propagación de la ola, $V_w = R \cdot \omega$, y de la velocidad orbital de las partículas, $u = r \cdot \omega$, los cuales son perpendiculares, respectivamente, a los lados R y r del triángulo de los radios, teniendo la misma relación ω entre los lados correspondientes, lo cual hace que los dos triángulos sean semejantes y de razón ω .

Como consecuencia de todo ello, el tercer lado del triángulo de velocidades tendrá por valor,

$$v = n_1 \cdot \omega \quad (2.3)$$

siendo normal a n_1 y, por tanto, tangente a la curva trocoidal en el punto P_1 .

2.3 Condiciones hidrodinámicas de la ola trocoidal

Una característica que debe tener el flujo de una ola trocoidal es que sea continuo. Si se acota un volumen entre dos superficies trocoidales muy próximas entre sí, (Fig. 2.3), el principio de continuidad exige que la masa de agua entre las dos trocoides permanezca constante.

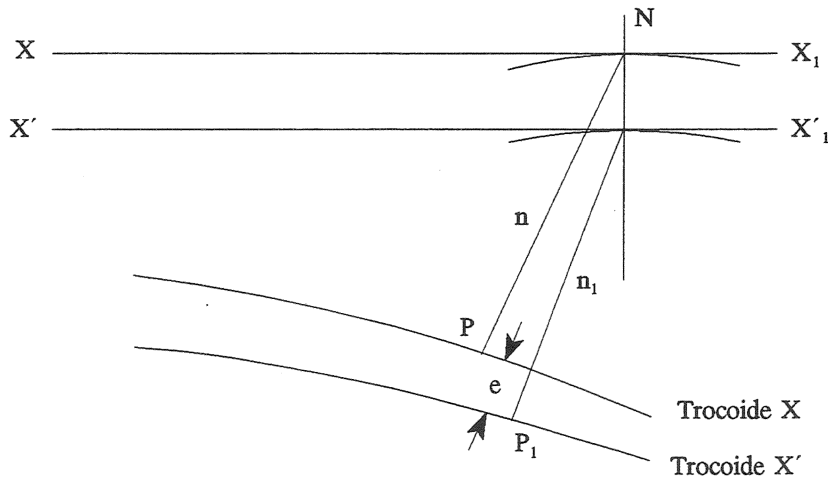


Fig. 2.3 Superficies trocoidales

Para que las dos superficies trocoidales puedan considerarse superficies de contorno de la corriente de agua que pasa entre ellas, es decir, para que la corriente no las atravesase, cada una de las superficies, separadamente ya que corresponden a niveles diferentes de la ola, tendrá la misma presión. En consecuencia, la diferencia de presión entre ambas superficies será un valor constante, independientemente de la separación que exista entre las mismas.

Considerando que el volumen de la corriente de agua que pasa por un punto cualquiera, entre dos superficies trocoidales cualesquiera, en la unidad de tiempo, es la unidad de volumen, la separación entre las superficies trocoidales que limitan la corriente correspondiente es inversamente proporcional a la velocidad de dicha corriente.

La velocidad de las partículas de agua que forman la corriente es directamente proporcional al radio instantáneo, n , y por lo tanto, el espesor de la corriente, e , debe ser inversamente proporcional a n , de lo cual se desprende que,

$$e \cdot n = \text{constante} \quad (2.4)$$

para un mismo volumen de agua.

La diferencia de presión entre dos superficies trocoidales en cualquier punto debe ser igual a la masa de las partículas de la corriente, por unidad de superficie, multiplicada por la aceleración comunicada a la misma,

$$dp = \frac{m \cdot a}{ds} \quad (2.5)$$

dp	diferencia de presión entre las dos superficies trocoidales, que es un valor constante
m	masa de agua
a	aceleración de las partículas de la corriente
ds	superficie de la trocoide, en este caso igual a la unidad

Dado que la diferencia de presión, dp , es constante, y que la masa es función del espesor e , el cual, para un mismo volumen de la corriente de agua, es inversamente proporcional al radio instantáneo n , la aceleración será directamente proporcional al mismo radio n . Lo anterior puede expresarse así,

$$m = f(e) \quad e \propto \frac{1}{n} \quad a \propto n$$

Por tanto, para que la ola trocoidal sea matemáticamente posible, deben probarse las condiciones siguientes:

- La presión sobre una superficie trocoidal cualquiera será constante.
- Las aceleraciones sobre las partículas de agua serán directamente proporcionales a los radios instantáneos.
- La separación entre dos superficies trocoidales será inversamente proporcional a los radios instantáneos de las partículas de agua de estas trocoides.

2.4 Presión sobre una superficie trocoidal

En la figura 2.4, las partículas de agua P y P₁ están sobre una superficie trocoidal a las distancias z , z_1 del eje XX₁ sobre el que rueda el círculo R.

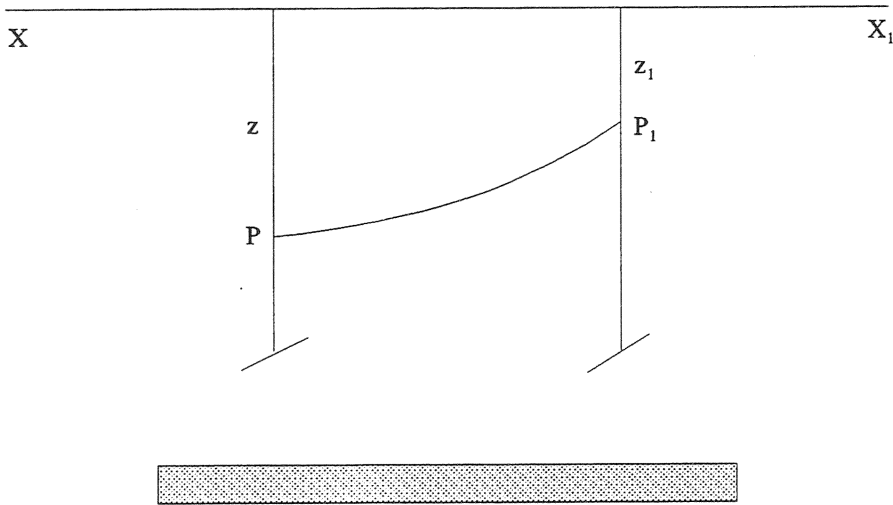


Fig. 2.4 Presión sobre una superficie trocoidal

2.4.1 Aplicación del teorema de Bernoulli

De acuerdo con las condiciones impuestas en el apartado anterior 2.3, se trata de demostrar que la presión sobre una superficie trocoidal tiene un valor constante.

El estudio se basa en la aplicación del teorema de Bernoulli entre dos puntos de una misma línea de corriente de un fluido en movimiento, en este caso el agua, verificándose que la diferencia de las presiones hidrodinámicas entre ellos es igual al peso de una columna de agua que tiene por base la unidad de superficie y por altura la diferencia de alturas entre los dos puntos.

Tomando como puntos de referencia las partículas P, P₁, (Fig. 2.4), y desarrollando la aplicación del teorema de Bernoulli expuesto, se tendrá,

$$p_H = p + \frac{1}{2} \gamma \cdot u^2$$

p_H	presión hidrodinámica
p	presión estática
$\frac{1}{2} \gamma \cdot u^2$	energía cinética de la unidad de volumen

$$\left(p_1 + \frac{1}{2} \gamma \cdot u_1^2 \right) - \left(p + \frac{1}{2} \gamma \cdot u^2 \right) = (z_1 - z) \gamma \cdot g$$

Asumiendo que se cumple la condición buscada, es decir, que las presiones sobre ambas partículas sean iguales,

$$p = p_1$$

en la última ecuación, se obtendrá.

$$\frac{1}{2} (u_1^2 - u^2) = (z_1 - z) g$$

$$\frac{u_1^2 - u^2}{2g} = z_1 - z$$

Poniendo las velocidades de las partículas en función de la frecuencia y de sus respectivos radios instantáneos,

$$u = \omega \cdot n$$

$$u_1 = \omega \cdot n_1$$

$$\frac{\omega^2 \cdot n_1^2 - \omega^2 \cdot n^2}{2g} = z_1 - z$$

$$\frac{\omega^2 (n_1^2 - n^2)}{2g} = z_1 - z \quad (2.6)$$

2.4.2 Ecuaciones del triángulo de radios

En el triángulo de radios, (Fig. 2.5), que es oblicuángulo, la fórmula que relaciona el lado n , radio instantáneo, con su ángulo opuesto, σ , y los otros dos lados, radios r y R , es igual a,

$$n^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos (180 - \sigma) \quad (2.7)$$

teniendo en cuenta que,

$$\cos (180 - \sigma) = - \cos \sigma$$

el valor del radio instantáneo n será

$$n^2 = r^2 + R^2 + 2r \cdot R \cdot \cos \sigma \quad (2.8)$$

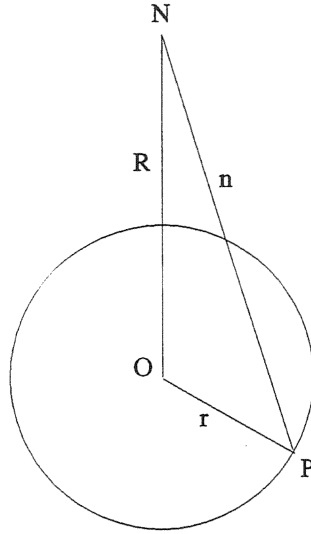


Fig. 2.5 Triángulo de radios

De igual manera se obtendrá la ecuación para n_1 ,

$$n_1^2 = r^2 + R^2 + 2r \cdot R \cdot \cos \sigma_1$$

Introduciendo estas dos últimas ecuaciones de los radios instantáneos en la ecuación 2.6,

$$\frac{\omega^2 \left[(r^2 + R^2 + 2r \cdot R \cdot \cos \sigma_1) - (r^2 + R^2 + 2r \cdot R \cdot \cos \sigma) \right]}{2g} = z_1 - z$$

$$\frac{\omega^2 (2r \cdot R \cdot \cos \sigma_1 - 2r \cdot R \cdot \cos \sigma)}{2g} = z_1 - z$$

$$\frac{R \cdot r \cdot \omega^2}{g} (\cos \sigma_1 - \cos \sigma) = z_1 - z \quad (2.9)$$

De la ecuación 1.51, las coordenadas z y z_1 , tendrán por valor,

$$z = R + r \cdot \cos \sigma$$

$$z_1 = R + r \cdot \cos \sigma_1$$

Restando las coordenadas, $(z_1 - z)$,

$$z_1 - z = (R + r \cdot \cos \sigma_1) - (R + r \cdot \cos \sigma)$$

$$z_1 - z = r (\cos \sigma_1 - \cos \sigma) \quad (2.10)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.9,

$$\frac{R \cdot r \cdot \omega^2}{g} (\cos \sigma_1 - \cos \sigma) = r (\cos \sigma_1 - \cos \sigma)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \quad (2.11)$$

2.4.3 Triángulo de fuerzas

Se van a considerar las fuerzas que actúan sobre una partícula P, (Fig. 2.6).

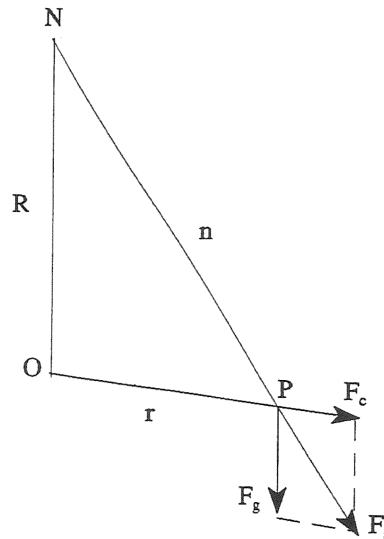


Fig. 2.6 Triángulo de fuerzas

Las fuerzas que actúan sobre la partícula P, que son la fuerza de la gravedad, F_g , la fuerza centrífuga, F_c , y la fuerza de aceleración resultante, F_a , tienen por ecuaciones,

$$F_g = m \cdot g \quad (2.12)$$

$$F_c = m \cdot r \cdot \omega^2 \quad (2.13)$$

$$F_a = m \cdot a \quad (2.14)$$

Sustituyendo la frecuencia en la ecuación 2.13 por el valor de la ecuación 2.11, se obtendrá,

$$F_c = m \cdot g \frac{r}{R} \quad (2.15)$$

Analizando los triángulos de los radios, (r , R , n), y de las fuerzas, (F_c , F_g , F_a), se sabe que F_c , la fuerza centrífuga, es continuación del radio r , y que F_g , la fuerza de la gravedad, es paralela al radio R .

Además, se establece la relación siguiente:

$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{m \cdot g \frac{r}{R}}{m \cdot g} = \frac{r}{R} \quad (2.16)$$

Por lo que los dos triángulos son semejantes y, consecuentemente, F_a , la fuerza de la aceleración resultante, estará en línea con n , radio instantáneo, siendo, debido a ello, normal a la superficie trocoidal.

Por tanto, al cumplirse la ecuación 2.11,

$$R = \frac{g}{\omega^2}$$

consecuencia de suponer en la aplicación del teorema de Bernoulli que las presiones p y p_1 de dos partículas de una misma superficie trocoidal son iguales, partículas sobre las que, como se ha visto, actúan solamente fuerzas perpendiculares, y al no existir fuerzas tangenciales, (se recuerda que en el estudio de las olas no se consideran las fuerzas tangenciales, es decir, las fuerzas de la viscosidad), la superficie reúne la condición de tener la presión constante.

2.5 Aceleración de las partículas de la superficie trocoidal

De los triángulos semejantes de radios y de fuerzas, (Fig. 2.6), la relación entre sus lados será,

$$\frac{F_g}{R} = \frac{F_c}{r} = \frac{F_a}{n} \quad (2.17)$$

Sustituyendo las fuerzas por sus valores correspondientes, (Ecs. 2.12, 2.13 y 2.14),

$$\frac{m \cdot g}{R} = \frac{m \cdot r \cdot \omega^2}{r} = \frac{m \cdot a}{n} \quad (2.18)$$

De la igualdad,

$$\frac{m \cdot g}{R} = \frac{m \cdot a}{n}$$

se obtiene la aceleración,

$$a = n \frac{g}{R} \quad (2.19)$$

Dado que g es constante y que también lo es R para una misma ola trocoidal, se tendrá que la relación entre la aceleración de la partícula y el radio instantáneo es constante,

$$\frac{a}{n} = \frac{g}{R} = \text{constante} \quad (2.20)$$

Luego, las aceleraciones sobre las partículas de agua serán directamente proporcionales a los radios instantáneos,

$$a \propto n$$

2.6 Velocidad y período de propagación de la ola

A partir de las ecuaciones que relacionan el radio R con la longitud de la ola y con la frecuencia, (Ecs. 1.49 y 2.11), se deducirá la fórmula de la velocidad de propagación de la ola.

$$L = 2\pi \cdot R$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R}$$

Recordando que en el triángulo de velocidades, (apartado 2.2), se ha visto que la velocidad de propagación de la ola es,

$$V_w = R \cdot \omega \quad (2.21)$$

$$\omega = \left(\frac{V_w}{R} \right)$$

Elevando al cuadrado e igualando,

$$\left(\frac{V_w}{R} \right)^2 = \frac{g}{R}$$

$$V_w = (R \cdot g)^{1/2}$$

$$V_w = \left(\frac{g \cdot L}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

Obteniéndose la velocidad de traslación del perfil de la ola trocoidal en aguas de profundidad ilimitada, que coincide con la ecuación 1.36 de la teoría potencial.

De las definiciones del período y de la frecuencia se establece que, (Ec. 1.41),

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Por otra parte, la relación entre el período y la velocidad de la ola es, (Ec. 1.5),

$$V_w = \frac{L}{T}$$

Sustituyendo la velocidad por el período en la ecuación 2.22,

$$V_w = \frac{L}{T} = \left(\frac{g \cdot L}{2\pi} \right)^{1/2}$$

$$T = \left(\frac{2\pi \cdot L}{g} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

2.7 Disminución del radio orbital

En la figura 2.7 se representan dos superficies trocoidales próximas, correspondientes a una misma vertical hidrodinámica.

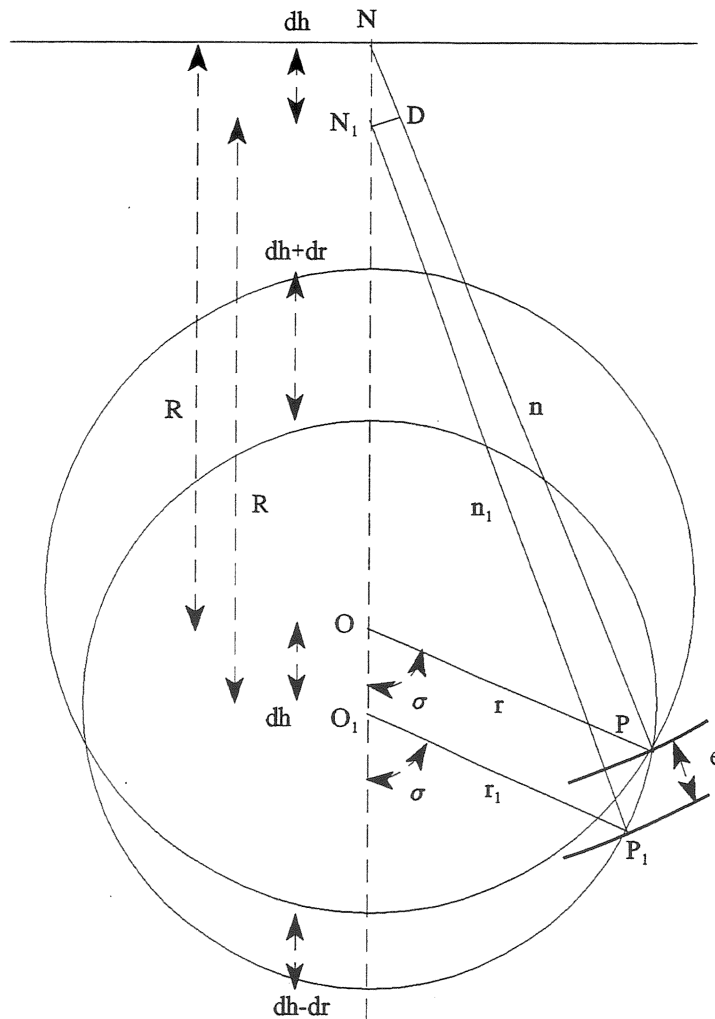


Fig. 2.7 Disminución de los radios orbitales

Entre dos superficies trocoidales de un mismo sistema bidimensional, el radio R es el mismo en todo el sistema dado que las olas trocoidales, a distinta profundidad, tienen la misma longitud. También será el mismo el ángulo de fase, σ , al estar los centros de las órbitas en la misma vertical. Sin embargo, el radio orbital disminuye con la profundidad.

La diferencia de profundidad entre las líneas de los centros de las órbitas es dh , y dr la diferencia entre los radios de las dos órbitas. Al espesor entre las dos superficies trocoidales en un punto cualquiera se le ha dado el valor e .

2.7.1 Variación del espesor con el radio instantáneo

Se quiere determinar si el espesor e entre dos superficies trocoidales próximas entre sí varían inversamente con el radio instantáneo n para las unidades de tiempo y de volumen, cumpliendo así con la tercera condición hidrodinámica de la teoría de la ola trocoidal. Los espesores e entre las crestas y los senos de dos superficies trocoidales próximas entre sí, serán, respectivamente,

$$e_{cresta} \quad dh + (r - r_1) = dh + dr \quad (2.24)$$

$$e_{seno} \quad dh - (r - r_1) = dh - dr \quad (2.25)$$

A su vez, el radio instantáneo n en la cresta y en el seno de la ola, tendrá por valores,

$$n_{cresta} = R - r \quad (2.26)$$

$$n_{seno} = R + r \quad (2.27)$$

La condición buscada se puede expresar estableciendo la proporción siguiente, basada en los valores de e y n anteriores para la cresta y el seno de la ola,

$$\frac{dh + dr}{dh - dr} = \frac{R - r}{R + r} \quad (2.28)$$

Operando sobre esta ecuación,

$$(dh + dr)(R + r) = (dh - dr)(R - r)$$

$$R \cdot dr + r \cdot dh = -R \cdot dr - r \cdot dh$$

$$R \cdot dr = -r \cdot dh$$

$$\frac{R}{r} = - \frac{dh}{dr} \quad (2.29)$$

Debido a la proximidad entre las dos superficies trocoidales, se puede entender que e es un infinitésimo, pudiéndose, entonces, considerar que los radios instantáneos, n y n_1 , son paralelos. Bajo esta condición se va a hallar la relación entre el espesor, e , y el radio instantáneo, n .

$$n + e = n_1 + ND$$

$$e = n_1 - n + dh \cdot \cos ONP$$

$$e = dn + dh \cdot \cos ONP \quad (2.30)$$

Trabajando sobre el triángulo ONP, se pondrá el $\cos ONP$ en función de los radios, R , r , n , y del ángulo de fase, σ .

$$R = n \cdot \cos ONP + r \cdot \cos NOP$$

$$R = n \cdot \cos ONP + r \cdot \cos (180 - \sigma)$$

$$R = n \cdot \cos ONP - r \cdot \cos \sigma$$

$$\frac{R + r \cdot \cos \sigma}{n} = \cos ONP$$

Sustituyendo en la ecuación 2.30,

$$e = dn + \frac{dh}{n} (R + r \cdot \cos \sigma) \quad (2.31)$$

Volviendo al triángulo ONP,

$$n^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos NOP$$

$$n^2 = r^2 + R^2 + 2r \cdot R \cdot \cos \sigma \quad (2.32)$$

Para valores constantes de R y de σ , la derivada de la ecuación anterior, será,

$$2n \cdot dn = 2r \cdot dr + 2R \cdot \cos \sigma \cdot dr$$

$$dn = \frac{dr}{n} (r + R \cdot \cos \sigma) \quad (2.33)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.31,

$$e = \frac{dr}{n} (r + R \cdot \cos \sigma) + \frac{dh}{n} (R + r \cdot \cos \sigma)$$

$$e = \frac{1}{n} (r \cdot dr + R \cdot dr \cdot \cos \sigma + R \cdot dh + r \cdot dh \cdot \cos \sigma)$$

$$e = \frac{1}{n} [(r \cdot dr + R \cdot dh) + (R \cdot dr + r \cdot dh) \cos \sigma] \quad (2.34)$$

Donde queda demostrado que el espesor, e , es inversamente proporcional al radio instantáneo, n .

2.7.2 Ley de decrecimiento del radio orbital con la profundidad

En el apartado 2.3, se indicó que,

$$e \cdot n = \text{constante}$$

para cualquier valor del ángulo de fase, σ . Esto requiere que en la ecuación 2.34, el término

$$(R \cdot dr + r \cdot dh) \cos \sigma = 0 \quad (2.35)$$

mientras que,

$$(r \cdot dr + R \cdot dh) = \text{constante} \quad (2.36)$$

Para que se cumpla la ecuación 2.35, el valor entre paréntesis debe ser igual a cero,

$$(R \cdot dr + r \cdot dh) = 0$$

$$\frac{R}{r} = - \frac{dh}{dr}$$

Relación ya deducida en la ecuación 2.29, y que puede expresarse de la forma siguiente,

$$\frac{dr}{r} = - \frac{dh}{R} \quad (2.37)$$

Integrando la ecuación anterior,

$$\int \frac{1}{r} dr = - \frac{1}{R} \int dh$$

$$Lr = - \frac{h}{R} + C \quad (2.38)$$

Llamando r_0 al radio orbital para la profundidad $h = 0$, el valor de la constante C , será

$$Lr_0 = C$$

de donde,

$$Lr = Lr_0 - \frac{h}{R}$$

$$Lr - Lr_0 = - \frac{h}{R}$$

siendo su exponencial,

$$\frac{r}{r_0} = e^{-h/R} \quad (2.39)$$

Teniendo en cuenta que,

$$L = 2\pi \cdot R$$

$$\frac{r}{r_0} = e^{-2\pi h/L} \quad (2.40)$$

Esta ecuación da la ley de decrecimiento del radio orbital con la profundidad.

Al ser cero el segundo término del segundo miembro, el espesor e será igual a,

$$e = \frac{1}{n} (r \cdot dr + R \cdot dh)$$

Sustituyendo el valor de dh por el deducido a partir de la ecuación 2.37,

$$dh = - \frac{R}{r} dr$$

$$e = \frac{1}{n} \left[r \cdot dr + R \left(- \frac{R}{r} dr \right) \right]$$

Simplificando, se obtendrá la relación entre el espesor y los radios,

$$e = \frac{dr}{n} \left(r - \frac{R^2}{r} \right)$$

$$e = \frac{dr}{n} \left(\frac{r^2 - R^2}{r} \right) \quad (2.41)$$

Dado que $R > r$, y debiendo ser positivo el valor del espesor, la ecuación 2.38 puede ponerse de la forma siguiente,

$$e = \frac{dr}{n} \left(\frac{R^2 - r^2}{r} \right) \quad (2.42)$$

2.8 Línea horizontal de centros de órbitas

La curva trocoidal no es simétrica con respecto a la línea horizontal de centros de las órbitas, siendo el área entre esta línea y la parte superior de la trocoide, cresta, menor que el área de la parte inferior, seno. Por tanto, el nivel de aguas tranquilas quedará por debajo de la línea de centros de las órbitas, (Fig. 2.8), ya que las áreas de agua por encima y por debajo deben ser iguales. Se está presentando el estudio con áreas en lugar de volúmenes, puesto que la ola trocoidal considerada es

bidimensional.

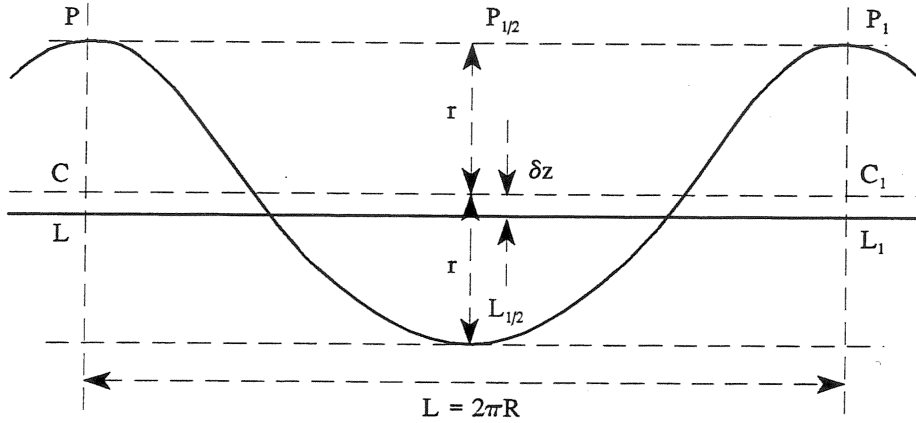


Figura 2.8 Línea de centros de órbitas

Sobre la figura 2.8, tendremos que el área del rectángulo PP_1L_1L , entre la línea de crestas y la horizontal de la mar, es igual al área encerrada entre la línea de crestas PP_1 y la curva trocoidal. A su vez el área de la mitad del rectángulo $PP_{1/2}L_{1/2}L$, será igual al área entre la línea $PP_{1/2}$ y la mitad de la curva trocoidal $PL_{1/2}$.

La última igualdad se puede expresar con la ecuación siguiente,

$$\int_0^{x=2\pi} z \cdot dx = \pi \cdot R (r + \delta z) \quad (2.43)$$

siendo δz la distancia entre la línea de centros de las órbitas y la horizontal del agua en calma.

Sustituyendo en la integral z y dx por los valores de las ecuaciones 1.51 y 1.53, con el consiguiente cambio de límites, de 0 a π , ángulos de fase, se tendrá,

$$z = R + r \cdot \cos \sigma$$

$$x = R \cdot \sigma + r \cdot \sin \sigma$$

$$dx = (R + r \cdot \cos \sigma) d\sigma$$

$$\int_0^{x=\pi R} z \cdot dx = \int_0^{\pi} (r + r \cdot \cos \sigma) (R + r \cdot \cos \sigma) d\sigma \quad (2.44)$$

Realizando operaciones,

$$\int_0^\pi (r \cdot R + r \cdot \cos \sigma \cdot R + r^2 \cdot \cos \sigma + r^2 \cdot \cos^2 \sigma) d\sigma$$

Lo que será igual a,

$$\int_0^\pi r \cdot R \cdot d\sigma + \int_0^\pi r \cdot R \cdot \cos \sigma \cdot d\sigma + \int_0^\pi r^2 \cdot \cos \sigma \cdot d\sigma + \int_0^\pi r^2 \cdot \cos^2 \sigma \cdot d\sigma$$

Resolviendo cada uno de los términos,

$$r \cdot R \int_0^\pi d\sigma = r \cdot R \cdot \pi \quad (2.45)$$

$$r \cdot R \int_0^\pi \cos \sigma \cdot d\sigma = r \cdot R \cdot \text{sen } \pi = 0$$

$$r^2 \int_0^\pi \cos \sigma \cdot d\sigma = r^2 \cdot \text{sen } \pi = 0$$

$$r^2 \int_0^\pi \cos^2 \sigma \cdot d\sigma = r^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos 2\sigma) d\sigma$$

$$\frac{1}{2} r^2 \int_0^\pi (1 + \cos 2\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi + \frac{1}{4} r^2 \cdot \text{sen } 2\pi$$

$$r^2 \int_0^\pi \cos^2 \sigma \cdot d\sigma = \frac{\pi}{2} r^2 \quad (2.46)$$

Por lo que la integral de la ecuación 2.44, tendrá por valor,

$$\int_0^\pi (r + r \cdot \cos \sigma) (R + r \cdot \cos \sigma) d\sigma = r \cdot R \cdot \pi + \frac{\pi}{2} r^2 \quad (2.47)$$

Valores que sustituidos en la ecuación 2.43,

$$r \cdot R \cdot \pi + \frac{\pi}{2} r^2 = \pi \cdot R (r + \delta z)$$

de donde,

$$\frac{\pi}{2} r^2 = \pi \cdot R \cdot \delta z$$

$$\delta z = \frac{r^2}{2R} \quad (2.48)$$

Siendo este valor la distancia entre las horizontales de la línea de centros y la superficie del agua en calma.

2.9 Incremento de la presión entre dos superficies trocoidales

En el apartado 2.3, (condiciones hidrodinámicas de la ola trocoidal), se estableció que debido a la propiedad de continuidad del flujo de una ola y a la condición de frontera de las superficies trocoidales, la diferencia de presión entre las mismas tendrá un valor constante, con independencia de su separación.

En la figura 2.9 están representadas dos superficies trocoidales S y S_1 .

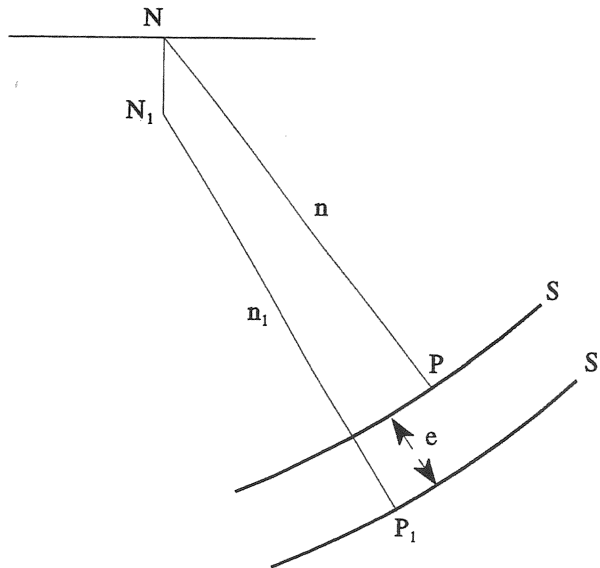


Fig. 2.9 Incremento de presión entre dos superficies trocoidales

En la ecuación 2.5 se ha visto que el incremento de la presión entre las dos superficies es igual a la fuerza que actúa sobre la masa de agua considerada, dividida por el área ocupada por la misma sobre la superficie trocoidal. En la hipótesis de que la anchura de la superficie sea la unidad,

$$ds = dl \cdot 1$$

ds superficie trocoidal de la masa de agua considerada
 dl longitud de la trocoide de esta superficie trocoidal

El incremento de la presión será igual a,

$$dp = \frac{m \cdot a}{ds} = \frac{m \cdot a}{dl} \quad (2.49)$$

El volumen de la masa anterior, para la condición de anchura de la superficie trocoidal igual a la unidad, será,

$$dV = e \cdot ds = e \cdot dl$$

en la que e es el espesor entre las dos superficies trocoidales.

Multiplicando el volumen, dV, por la densidad del agua, γ , se obtendrá su masa,

$$m = \gamma \cdot dV = \gamma \cdot e \cdot dl$$

Por otra parte, la ecuación de la aceleración, a, en función del radio R de la circunferencia de la trocoide y del radio instantáneo, n, (Ec. 2.19), es

$$a = n \frac{g}{R}$$

Introduciendo este valor en la ecuación 2.49, el incremento de la presión tomará la expresión siguiente,

$$dp = \frac{\gamma \cdot e \cdot dl \cdot n \cdot g}{dl \cdot R}$$

$$dp = \frac{\gamma \cdot e \cdot n \cdot g}{R} \quad (2.50)$$

El segundo miembro de la ecuación anterior tiene un valor constante, ya que, (Ec. 2.4),

$$e \cdot n = \text{constante}$$

y también son constantes el resto de los parámetros, la densidad, γ , la aceleración de la gravedad, g, y el radio R de la circunferencia de la trocoide.

La velocidad de desplazamiento de las partículas de agua sobre el perfil trocoidal de la ola estacionaria es, (Ec. 2.3),

$$v = n \cdot \omega = n \frac{d\sigma}{dt}$$

En la que σ es el ángulo girado por la circunferencia que engendra la trocoide. También el valor de la velocidad será,

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

para la anchura de la superficie trocoidal igual a la unidad, según la hipótesis impuesta al inicio del apartado. Por tanto,

$$\frac{ds}{dt} = n \frac{d\sigma}{dt}$$

$$ds = n \cdot d\sigma \quad (2.51)$$

El volumen del agua entre las dos superficies trocoidales y para la longitud de la ola será igual a la integral del volumen dV , entre $\sigma = 0$ y $\sigma = 2\pi$,

$$V = \int_0^{2\pi} dV$$

$$V = \int_0^{2\pi} n \cdot e \cdot d\sigma$$

$$V = 2\pi \cdot n \cdot e \quad (2.52)$$

El mismo volumen de agua para la condición de mar en calma y para una longitud igual a la de la ola, tendrá por expresión,

$$V = 2\pi \cdot R \cdot e' \quad (2.53)$$

en la que e' será el espesor (vertical) del agua. Igualando las ecuaciones 2.52 y 2.53 se tendrá,

$$2\pi \cdot n \cdot e = 2\pi \cdot R \cdot e'$$

$$n \cdot e = R \cdot e' \quad (2.54)$$

Poniendo $n \cdot e$ en función del incremento de presión a partir de la ecuación 2.50,

$$n \cdot e = \frac{dp \cdot R}{\gamma \cdot g}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.54,

$$\frac{dp \cdot R}{\gamma \cdot g} = R \cdot e'$$

Simplificando y despejando el incremento de la presión,

$$dp = e' \cdot \gamma \cdot g \quad (2.55)$$

Por lo tanto, de acuerdo con la ley de variación de la presión hidrostática, dp , variación de la presión entre dos superficies trocoidales, es, también, el incremento de presión al pasar de una a otra de las correspondientes superficies en aguas tranquilas.

Del apartado 2.7.1, (variación del espesor con el radio instantáneo), se desprende que con relación a dos superficies trocoidales el espesor entre las crestas es mayor que el espesor entre los senos, (Fig. 2.7). Sin embargo, y de acuerdo con la constancia de presión, en la cresta y en el seno existirá el mismo incremento de presión, o lo que es lo mismo, en la cresta y en el seno de cada superficie trocoidal habrá la misma presión. La diferencia de espesor queda contrarrestada con la fuerza centrífuga de las partículas en su movimiento orbital, la cual se opone a la fuerza de la gravedad en la cresta, mientras que en el seno tiene el mismo sentido, (Figs. 2.6 y 2.7).

2.10 Energía de la ola

Va a demostrarse que la energía de una ola trocoidal en aguas de profundidad ilimitada es mitad potencial y mitad cinética. Para ello, se hallará primeramente la posición vertical del centro de gravedad de un volumen de agua entre dos superficies trocoidales infinitamente próximas, de longitud igual a la ola y de anchura la unidad.

A partir de la ecuación 2.52,

$$V = n \cdot e \cdot 2\pi$$

se deduce que el valor dV , de un volumen elemental de agua, será igual a,

$$dV = n \cdot e \cdot d\sigma \quad (2.56)$$

El momento de este volumen elemental con respecto a una línea tangente al seno de la trocoide, línea de senos, que será horizontal y paralela al eje XX_1 , (Fig. 2.10), tendrá por valor este volumen elemental por su brazo,

$$dM = (R + r - z) dV$$

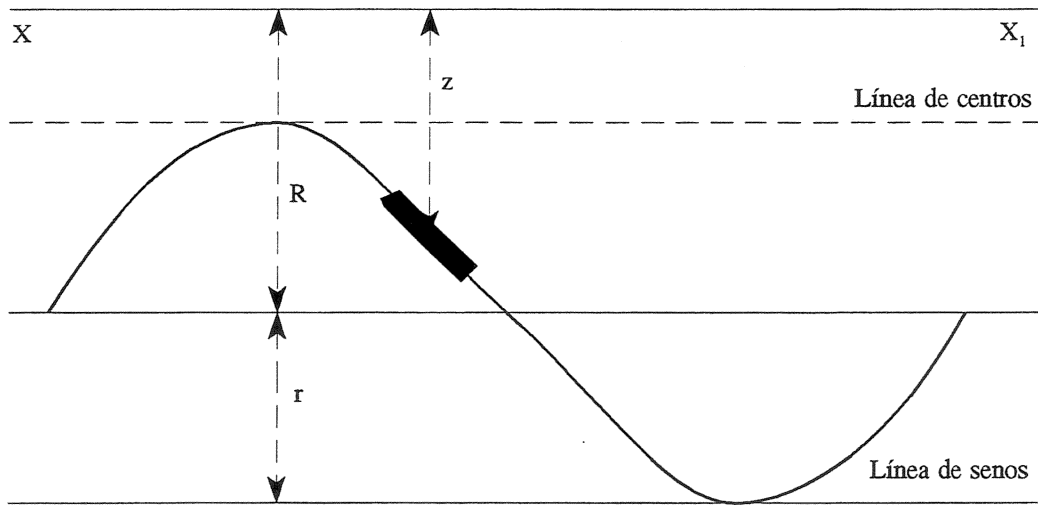


Fig. 2.10 Momento del volumen elemental con respecto a la línea de senos

Sustituyendo el valor de z por el de su ecuación paramétrica, (Ec. 1.51),

$$dM = (R + r - R - r \cdot \cos \sigma) dV$$

$$dM = r (1 - \cos \sigma) dV$$

$$dM = r (1 - \cos \sigma) n \cdot e \cdot d\sigma \quad (2.57)$$

La posición vertical del centro de gravedad de todo el volumen, $g_v(V)$, se determinará por la relación entre las integrales del momento y del volumen,

$$\begin{aligned}
 g_v (V) &= \frac{\int_0^{2\pi} r (1 - \cos \sigma) n \cdot e \cdot d\sigma}{\int_0^{2\pi} n \cdot e \cdot d\sigma} = \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} r \cdot d\sigma - \int_0^{2\pi} r \cdot \cos \sigma \cdot d\sigma}{\int_0^{2\pi} d\sigma} = \\
 &= \frac{r \cdot 2\pi - r \cdot \sin 2\pi}{2\pi}
 \end{aligned}$$

$$g_v (V) = r \quad (2.58)$$

Por tanto la elevación media del agua sobre la línea de senos es r . La distancia entre la horizontal de la línea de centros y la superficie del agua en calma, (Ec. 2.48 y Fig. 2.8), viene dada por,

$$\delta z = \frac{r^2}{2R}$$

estando esta última por debajo de la línea de centros. Su altura sobre la línea de senos será igual a,

$$r - \frac{r^2}{2R} \quad (2.59)$$

En consecuencia, y dada su condición de espesor infinitesimal, puede considerarse este valor como la altura del centro de gravedad del mismo volumen en aguas tranquilas sobre la línea de senos.

La energía potencial de este volumen considerado de la ola trocoidal, es

$$E_p = \gamma \cdot g \cdot V \frac{r^2}{2R} \quad (2.60)$$

Sustituyendo el volumen por el valor de la ecuación 2.52,

$$E_p = \gamma \cdot g \cdot \pi \cdot n \cdot e \frac{r^2}{R} \quad (2.61)$$

Por otra parte, la energía cinética de las partículas de agua girando en su órbita circular, será

$$\frac{1}{2} m (\omega \cdot r)^2 \quad (2.62)$$

Por tanto, la energía cinética de todo el volumen de la trocoide bajo estudio, tendrá por valor,

$$E_c = \frac{1}{2} \gamma \cdot V \cdot \omega^2 \cdot r^2 \quad (2.63)$$

Sustituyendo, como antes, V por la expresión de la ecuación 2.52,

$$E_c = \gamma \cdot \pi \cdot n \cdot e \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

Dado que, (Ec. 2.11),

$$\omega^2 = \frac{g}{R}$$

Se tendrá que la energía cinética es igual a,

$$E_c = \gamma \cdot g \cdot \pi \cdot n \cdot e \frac{r^2}{R} \quad (2.64)$$

Consecuentemente, se confirma que la energía potencial, (Ec. 2.61), y la energía cinética, (Ec. 2.64), tienen la misma expresión, y que el valor considerado de la energía total del volumen entre superficies trocoidales será mitad potencial y mitad cinética, esto es,

$$E_p + E_c = E \quad (2.65)$$

$$E = 2 \cdot \gamma \cdot g \cdot \pi \cdot n \cdot e \frac{r^2}{R} \quad (2.66)$$

Introduciendo la ecuación 2.42, en la anterior,

$$e \cdot n = \left(\frac{R^2 - r^2}{r} \right) dr$$

$$E = 2\pi \cdot \gamma \cdot g \frac{R^2 - r^2}{r} \frac{r^2}{R} dr$$

$$E = \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot g}{R} (r \cdot R^2 - r^3) dr$$

Integrando entre $r = 0$ y $r = r_0$, en donde r_0 es el radio orbital para la profundidad $h = 0$, se obtendrá la energía de la ola trocoidal, E_T , para la longitud de la ola y con una anchura igual a la unidad.

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot g}{R} \int_0^{r_0} (r \cdot R^2 - r^3) dr = \\ &= \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot g}{R} \left[R^2 \int_0^{r_0} r \cdot dr - \int_0^{r_0} r^3 \cdot dr \right] = \\ &= \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot g}{R} \left[\frac{1}{2} R^2 \cdot r_0^2 - \frac{1}{4} r_0^4 \right] = \\ &= \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot g}{R} \frac{R^2 \cdot r_0^2}{2} - \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot g}{R} \frac{r_0^4}{4} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Siendo,

$$2\pi R = L_w \quad \text{longitud de la ola}$$

$$2r_0 = H \quad \text{altura de la ola}$$

Se hallará la ecuación de la energía total en función de la longitud y de la altura de la ola,

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{8} \gamma \cdot g \cdot L_w \cdot H^2 - \frac{1}{8} \gamma \cdot g \cdot L_w \cdot H^2 \frac{r_0^2}{2R^2} \\ E_T &= \frac{1}{8} \gamma \cdot g \cdot L_w \cdot H^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{2R^2} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Una práctica habitual en los estudios en los que interviene la ola trocoidal es considerar que la

relación entre la altura de la ola y su longitud es de un veinteavo,

$$\frac{H}{L_w} = \frac{1}{20} \quad (2.69)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \frac{r_0^2}{2R^2} &= \frac{(H/2)^2}{L_w^2/2\pi^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \frac{H^2}{L_w^2} = \\ &= \frac{3,1416^2}{2} \left(\frac{1}{20} \right)^2 = 0,0123 \\ \frac{r_0^2}{2R^2} &\approx 1 \% \end{aligned} \quad (2.70)$$

Si en la ecuación 2.68 se aproxima el valor entre paréntesis a uno,

$$\left(1 - \frac{r_0^2}{2R^2} \right) \approx 1$$

se cometerá un error de un uno por ciento, quedando como valor aproximado de la energía,

$$E_T = \frac{1}{8} \gamma \cdot g \cdot L_w \cdot H^2 \quad (2.71)$$

Al analizar esta ecuación se observa que:

- la energía es proporcional a la longitud de la ola y al cuadrado de su altura.

Dividiendo la ecuación 2.71 por la longitud de la ola,

$$\frac{E_T}{L_w} = \frac{1}{8} \gamma \cdot g \cdot H^2 \quad (2.72)$$

Cuya conclusión final es la siguiente:

- la energía por unidad de área de la superficie de la mar es proporcional al cuadrado de la altura de la ola.

3 Movimientos del buque

3.1 Introducción

El buque entre olas se asemeja a una viga flotante en la que actúan un conjunto de fuerzas complejas variables en el tiempo.

El movimiento del buque entre olas es una característica que influye negativamente en diversos parámetros del mismo, provocando, entre otros efectos, disminución de la estabilidad e incremento de los esfuerzos sobre el casco. Movimientos de amplitudes excesivas pueden llegar a ser peligrosos.

El empuje del agua actúa perpendicularmente a la superficie libre según la vertical cuando la mar está en calma o variando constantemente cuando la superficie es una ola trocoidal. De acuerdo con lo anterior, un buque recibirá, en el primer caso, un empuje constante, mientras que en el segundo, éste variará continuamente tanto en intensidad como en dirección.

Dado que las dos condiciones de equilibrio de un buque son desplazamiento igual a empuje y centro de carena y centro de gravedad en la misma vertical, éstas se verán modificadas con el movimiento debido a las olas, ya que tanto la fuerza del desplazamiento como la del empuje quedan sujetas a variaciones, resultando unos valores que denominaremos aparentes. También el centro de carena se moverá continuamente, afectando a la segunda condición de equilibrio.

3.2 Movimientos del buque

Los movimientos del buque están, lógicamente, de acuerdo con sus seis grados de libertad, a saber, tres de traslación y tres de rotación, utilizándose para su estudio un sistema de coordenadas rectangular fijo con el buque, (Fig. 3.1). Los tres movimientos de traslación se realizan a lo largo de los ejes X, Y, Z, denominándose movimientos de traslación longitudinal, transversal y vertical, respectivamente. Los tres movimientos de rotación son: el de balance alrededor del eje longitudinal X, el de cabeceo con respecto al eje transversal Y, y el de guiñada alrededor del eje vertical Z.

Los movimientos de traslación transversal y longitudinal y el movimiento de guiñada, no crean ningún momento ya que el buque para estos modos de oscilación está en equilibrio indiferente. Para los otros movimientos, de traslación vertical y de rotación, balance y cabeceo, se genera un momento resistente

si el buque es estable en el modo de oscilación correspondiente, lo cual usualmente debería ser así, pero con una observación a realizar sobre el balance, ya que la estabilidad transversal suele tener valores pequeños, o incluso llegar a ser críticos.

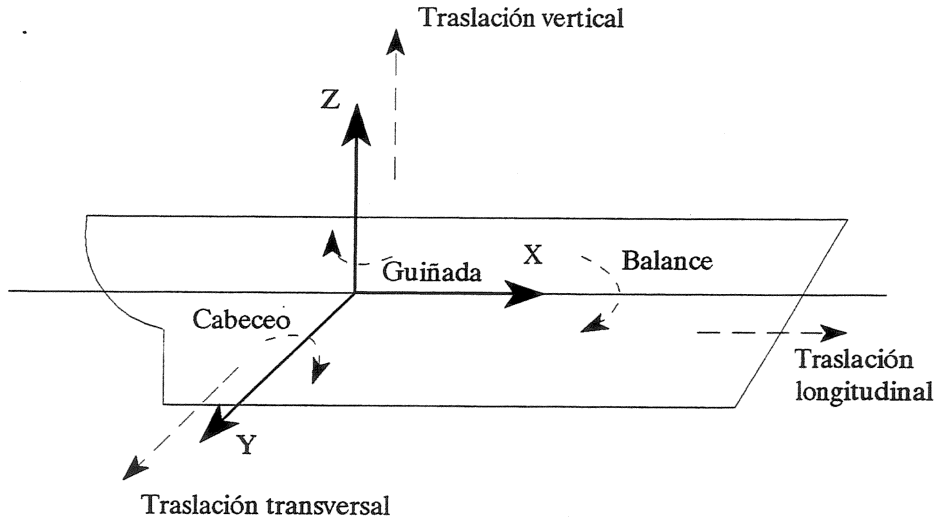


Fig. 3.1 Movimientos del buque

a) Movimientos transversal, longitudinal y vertical

Los movimientos de traslación y rotación anteriores se pueden clasificar según los componentes transversal, longitudinal y vertical de cada movimiento. Así resulta la agrupación de movimientos siguiente:

- Componente transversal: traslación transversal, balance y guiñada.
- Componente longitudinal: traslación longitudinal, cabeceo y guiñada.
- Componente vertical: traslación vertical, balance y cabeceo.

b) Acoplamiento

Los movimientos no se presentan de forma independiente sino combinados con algunos o todos los demás. Como ejemplos para su explicación se consideran los dos casos siguientes, elegidos por su interés y por su representatividad.

b.1) Buque recibiendo las olas de través. Los movimientos afectados serán los de componentes transversal y vertical. Inicialmente se producirá balance y traslaciones transversal y vertical, y debido

a efectos secundarios, cabeceo y guiñada.

b.2) Buque con olas de proa o de popa. En este caso los movimientos afectados tendrán componentes longitudinal y, también, vertical, produciendo en primera instancia cabeceo y traslaciones longitudinal y vertical, siendo el balance de efecto secundario.

Puede indicarse como norma que en un proceso de movimiento del buque con olas de una dirección cualquiera, conviven todos los modos de oscilación.

c) Respuesta del buque

Los seis movimientos de oscilación pueden tener lugar, por tanto, con el buque flotando entre olas, aunque la atención se centrará sobre dos movimientos de rotación, balance y cabeceo, y el movimiento de traslación vertical.

Estos dos movimientos de rotación tienen como característica el que un buque estable desplazado de su posición de equilibrio por alguna fuerza, al retirarla, éste oscilará hasta que el movimiento se amortigüe debido a la resistencia del agua.

Una información importante para el marino es conocer los períodos naturales de la respuesta del buque para los tres modos de oscilación indicados.

d) Eje de oscilación. Balance y cabeceo

Si sobre un cuerpo que está inmerso en un fluido, por ejemplo el aire o el agua, se aplica una fuerza momentánea, ésta tenderá a hacerlo girar alrededor de su centro de gravedad. Esto es lo que ocurriría en el caso de un submarino totalmente sumergido. Sin embargo, los buques, con su particularidad de estar parcialmente en el agua y parcialmente en el aire, no tienen un eje de giro u oscilación fijo debido a los efectos dinámicos distintos de los dos fluidos.

Como orientación puede indicarse que para un buque con el centro de gravedad por encima de su flotación, el eje de oscilación estará por debajo del propio centro de gravedad, mientras que si el centro de gravedad del buque está suficientemente bajo, el eje de oscilación pasará por encima suyo.

En un buque mercante de formas normales, cargado usualmente y para ángulos de balance o cabeceo pequeños, los ejes de oscilación correspondientes pasarán próximos al centro de gravedad del buque, pudiéndose considerar su coincidencia como referencia y simplificación del problema.

3.3 Movimiento armónico simple

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un buque en aguas tranquilas, en los modos de balance, cabeceo y traslación vertical, son del tipo de las ecuaciones de un sistema vibratorio, que para el supuesto de un buque oscilando sin amortiguamiento, es decir, sin considerar la resistencia

del agua, serán las correspondientes a un movimiento armónico simple.

3.3.1 Ecuaciones del movimiento armónico simple

Sea un punto P girando en el extremo de un radio, r , sobre una circunferencia, (Fig. 3.2), y P_1 su proyección sobre el diámetro XX' . El radio r gira alrededor del centro O, partiendo de la posición OX' , a una velocidad angular constante de ω radianes/segundo. Durante el giro, el punto P_1 oscilará entre $X' - X - X'$. A este movimiento se le denomina armónico simple.

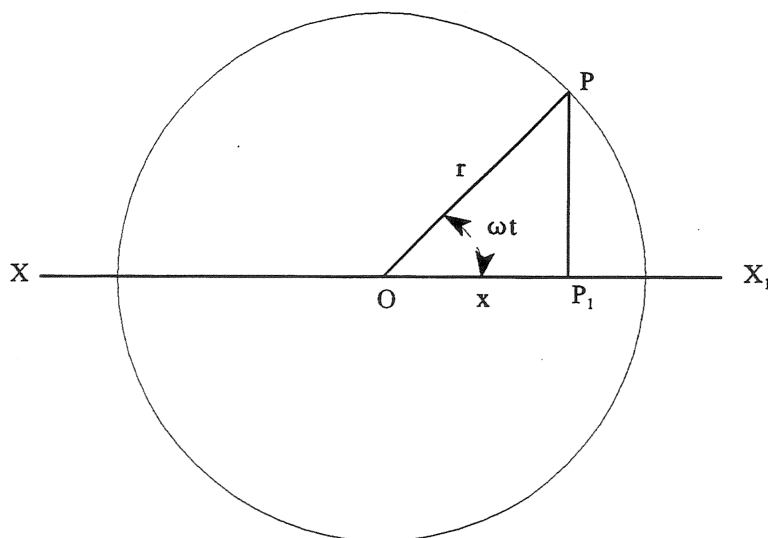


Fig. 3.2 Movimiento armónico simple

Suponiendo el radio girando desde OX' a OP en t segundos, el ángulo POX' será igual a $\omega \cdot t$. Al tiempo total para dar una vuelta completa, 2π radianes, le llamaremos T , siendo igual a,

$$2\pi = \omega \cdot T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.1)$$

Relación que ya se había definido anteriormente, (Ec. 1.4).

A continuación se va a deducir la ecuación diferencial para el movimiento armónico simple. En la figura 3.2, el segmento $OP_1 = x$ puesto en función del radio y del ángulo POP_1 , se expresará de la forma siguiente,

$$x = r \cdot \cos \omega t \quad (3.2)$$

Derivando con respecto al tiempo, t ,

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega \cdot t$$

en donde el primer miembro de la ecuación es una velocidad.

Derivando nuevamente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega \cdot t$$

siendo, ahora, el primer miembro una aceleración.

Introduciendo la ecuación 3.2 en la anterior,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

De donde,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (3.3)$$

La solución de la ecuación diferencial del movimiento armónico simple es del tipo,

$$x = A_K \cdot \text{sen } \omega \cdot t + B_K \cdot \cos \omega \cdot t$$

siendo A_K y B_K constantes.

3.4 Balance, cabeceo y traslación vertical

Una manera habitual de enfocar el estudio de los movimientos del buque en la mar es la de considerar por una parte al buque oscilando en aguas quietas o entre olas, y por la otra, tener en cuenta o no el amortiguamiento debido a la resistencia que produce el agua sobre el casco. Este enfoque proporciona cuatro posibilidades:

Buque en aguas quietas
con resistencia
sin resistencia

Buque entre olas
con resistencia
sin resistencia

A esta clasificación se podría añadir, además, el que las olas sean regulares o irregulares.

En la realidad, los movimientos de oscilación del buque son los derivados del buque entre olas y con resistencia. Matemáticamente éste sería el caso general, y los demás, casos particulares a deducir a partir de él.

Se ha visto, también, que los componentes del movimiento del buque no son independientes unos de otros, sino que existe acoplamiento entre ellos. Sin embargo es conveniente considerarlos de forma independiente, además, y bajo la perspectiva de los temas a tratar, el interés reside en los movimientos de balance, cabeceo y traslación vertical.

Para simplificar el tratamiento y el aparato matemático se realiza primero el estudio del movimiento en aguas tranquilas y sin resistencia, para posteriormente introducir su efecto. Se sigue el mismo criterio para el buque entre olas.

Con todas las restricciones indicadas hasta aquí, hay que entender que los resultados serán sólo una aproximación a la realidad.

3.5 Oscilación y período

Se denomina oscilación simple al movimiento, angular o de traslación, que efectúa el buque entre las dos posiciones extremas que ocupará con respecto a la posición inicial de equilibrio. Por ejemplo: si se trata de un movimiento de balance y supuesto el buque con equilibrio estable para la posición de adrizado, la oscilación simple será el giro efectuado entre las posiciones de las escoras alcanzadas a babor y a estribor. Se denomina amplitud de la oscilación al ángulo descrito o a la traslación realizada. El tiempo en segundos empleado en efectuar una oscilación simple, es el período simple de oscilación, T_s .

La oscilación completa define el movimiento completo de giro, o de trayectoria, desde una posición extrema hasta la otra y vuelta a la primera. Siguiendo con el ejemplo anterior, sería el balance iniciado en la posición de escora de babor hasta la escora que tome el buque a estribor y vuelta a la posición inicial de babor. El período doble será el tiempo en segundos empleado en realizar esta oscilación completa, T_d .

3.6 Balance

El movimiento de balance, tal y como ya se ha explicado, es el movimiento de rotación del buque alrededor del eje longitudinal de oscilación. Con el balance se modifica la forma del volumen sumergido creándose las cuñas de emersión e inmersión, que producen, en consecuencia, un desplazamiento del centro de carena que afecta a una de las condiciones de equilibrio, esto es, centro

de gravedad y centro de carena en la misma vertical.

Durante el movimiento de balance, una cierta cantidad de agua se mueve acompañando al buque. Esta masa de agua añadida incrementará la masa en rotación, desplazamiento del buque más agua añadida, y afectará al radio de giro incrementándolo. Sin embargo, esta masa de agua no se va a considerar en los estudios del balance en aguas tranquilas y entre olas, con y sin resistencia, por razones de su efecto relativo y de simplificación.

3.7 Balance en aguas tranquilas y sin resistencia

Si a un buque flotando en aguas tranquilas se le aplica una fuerza exterior de forma instantánea, sufrirá un momento escorante al que se le opondrá el momento adrizante debido a la estabilidad que tenga el buque.

De acuerdo con los estudios sobre estabilidad del buque, los dos movimientos, escorante y adrizante, se pueden representar por sendas curvas estáticas, (Fig. 3.3). La escora máxima se alcanzará cuando los trabajos de las dos fuerzas se igualen, o lo que es lo mismo, cuando las curvas dinámicas obtenidas a partir de las estáticas tengan el mismo valor, es decir, cuando se corten.

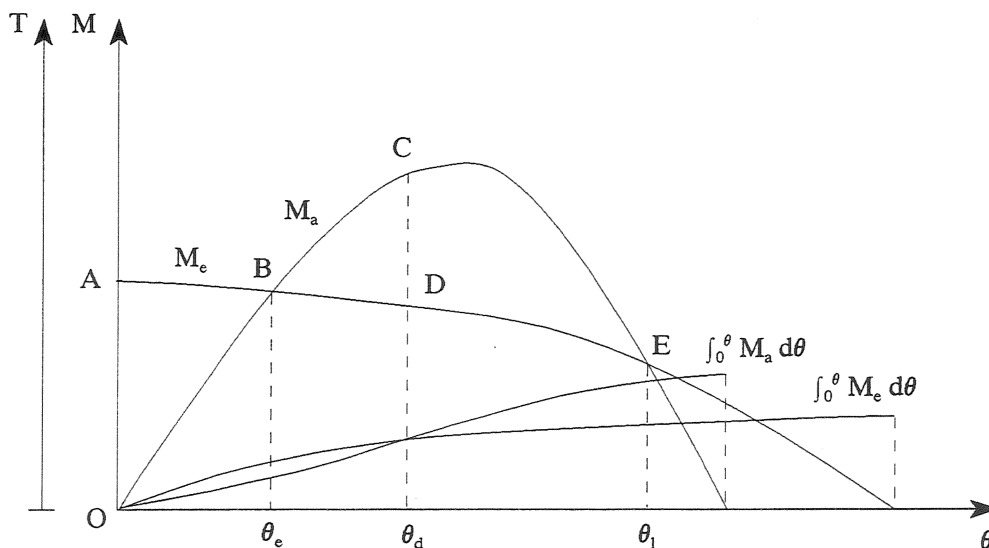


Fig. 3.3 Curvas estáticas y dinámicas adrizantes y escorantes

La energía potencial es igual al trabajo realizado por la fuerza externa al producir el balance del buque, dado que se parte de la hipótesis simplificadora de que no hay resistencia del agua al

movimiento. Una vez alcanzado el ángulo de escora máximo, para el que se tendrá la máxima energía potencial, si la reserva de estabilidad del buque, diferencia entre los momentos escorante y adrizante, es positiva para aquella escora, el momento adrizante hará que el buque vuelva a la posición inicial de equilibrio, (se recuerda que la fuerza externa es momentánea y que, por tanto, desaparece). Durante el proceso de recuperación la energía potencial se convertirá en energía cinética, y cuando el buque llegue a la posición de adrizado la energía potencial será nula, mientras que la energía cinética será exactamente igual a la energía potencial máxima anterior.

Consecuencia de todo ello será que el buque continuará su movimiento de balance, ahora, hacia la otra banda de la línea central, es decir, si el balance inicial fue, por ejemplo, a estribor, éste será a babor, convirtiendo nuevamente la energía cinética en energía potencial.

Bajo las condiciones asumidas, este movimiento de balance se repetirá indefinidamente, teniendo una amplitud de balance constante.

En lo que sigue se va a deducir la ecuación del movimiento de balance del buque en aguas tranquilas y no resistentes alrededor de un eje de inclinación longitudinal, el cual se supone que pasa por su centro de gravedad, y manteniéndose la amplitud de balance dentro de la estabilidad inicial. Para que exista equilibrio dinámico deberá verificarse que el momento adrizante sea igual al momento de las fuerzas de inercia.

3.7.1 Fórmula del período doble de balance

Una fórmula interesante para el marino es la que liga el período doble de balance del buque con la altura metacéntrica inicial transversal, interviniendo en esta relación el radio de giro de la masa del buque, lo que desafortunadamente hace que resulte a veces de difícil utilización. La deducción se inicia con la ecuación del movimiento de un sólido que gira alrededor de un eje, la cual tiene por expresión,

$$I_g \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

siendo:

I_g momento de inercia de la masa del buque alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro de gravedad

θ ángulo de escora

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ aceleración angular

De acuerdo con el planteamiento expuesto, esta ecuación se iguala al momento adrizante del buque, por tanto, su suma algebraica será igual a cero.

$$I_g \frac{d^2\theta}{dt^2} + M_a = 0 \quad (3.4)$$

M_a momento adrizante

Por su parte, la inercia de la masa del buque, I_g , es igual a

$$I_g = \sum m_i \cdot r_i^2 = \frac{D}{g} k^2 \quad (3.5)$$

m_i masas parciales

r_i radios de las masas parciales

D desplazamiento del buque, (en su valor fuerza)

g aceleración de la gravedad

k radio de giro de la masa del buque con respecto al eje longitudinal que pasa por su centro de gravedad

Con respecto al radio de giro se recuerdan tres características;

a) El radio de giro de un cuerpo con respecto a un eje es la distancia al eje a que debería estar un punto material, de la misma masa que el cuerpo, para que se verifique que el momento de inercia del cuerpo y del punto material con respecto a tal eje sean iguales.

b) El radio de giro es una medida de la distribución de la masa de un cuerpo respecto a un eje determinado de rotación.

c) Un radio de giro grande significa que, en valor medio, la masa está relativamente alejada.

Para ángulos pequeños de escora,

$$M_a = D \cdot GZ = D \cdot GM \cdot \sin \theta = D \cdot GM \cdot \theta \quad (3.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.5 y 3.6 en la ecuación 3.4,

$$\begin{aligned} \frac{D}{g} k^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \cdot GM \cdot \theta &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g \cdot GM}{k^2} \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la ecuación del movimiento vibratorio armónico simple, (Ec. 3.3), de lo cual se desprende que,

$$x = \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot GM}{k^2}} \quad (3.8)$$

Siendo ω la frecuencia.

El período doble de balance de acuerdo con la ecuación 3.1, es

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sustituyendo la frecuencia por el valor obtenido en la ecuación 3.8,

$$T_d = \frac{2\pi \cdot k}{\sqrt{g \cdot GM}} \quad (3.9)$$

De esta ecuación se deduce que el período natural de balance del buque no depende del valor de la escora que tome durante la oscilación, es decir, el movimiento de balance es isócrono. Dado que para una condición determinada de carga el período de balance tiene un valor constante para cualquier valor de la escora máxima que tome el buque, la velocidad angular media variará directamente con la escora máxima. Otra observación a realizar sobre la ecuación 3.9 es que al no considerarse la masa de agua añadida en el radio de giro, y dado que éste en realidad sería algo mayor, el período doble de balance calculado será algo inferior a su valor real.

3.7.2 Ecuación diferencial del movimiento de balance

La ecuación 3.7 del subapartado anterior es la ecuación diferencial del movimiento de balance, siendo del tipo,

$$\theta = A_K \cdot \text{sen } \omega \cdot t + B_K \cdot \cos \omega \cdot t \quad (3.10)$$

tal y como se ha visto en el apartado 3.3 al estudiar las ecuaciones del movimiento armónico simple.

Para calcular las constantes A_K y B_K de la solución, se supone una condición general para cuando el tiempo sea igual a cero, $t = 0$, en la que

$$\theta = \varphi \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_\varphi$$

En la ecuación 3.10 se verificará que, siendo $t = 0$, el valor de la constante A_K será,

$$\varphi = A_K \cdot \text{sen } \omega \cdot t + B_K \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$\varphi = B_K$$

Para obtener el valor de la constante A_K , se deriva la ecuación 3.10,

$$\frac{d\theta}{dt} = A_K \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t - B_K \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega \cdot t$$

quedando,

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_K \cdot \omega$$

Despejando A_K ,

$$A_K = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (3.11)$$

Al sustituir en la ecuación 3.10 las constantes A_K y B_K por los valores hallados, resultará la ecuación diferencial siguiente,

$$\theta = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \text{sen } \omega \cdot t + \varphi \cdot \cos \omega \cdot t \quad (3.12)$$

Recordando que,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_d}$$

la constante A_K de la ecuación 3.11, tomará la forma siguiente,

$$A_K = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{T_d}{2\pi}$$

e introduciendo la velocidad angular por $d\varphi/dt$, quedará

$$A_K = \frac{\omega_\varphi \cdot T_d}{2\pi}$$

Finalmente se transforma la ecuación diferencial 3.12, en la siguiente ecuación,

$$\theta = \frac{\omega_\varphi \cdot T_d}{2\pi} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi \cdot \cos \frac{2\pi \cdot t}{T_d} \quad (3.13)$$

3.7.3 Ecuación diferencial de la aceleración angular

La aceleración angular se obtiene derivando dos veces la ecuación transformada del movimiento de balance anterior, (Ec. 3.13),

Primera derivada, velocidad angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_\varphi \cdot T_d}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T_d} \cdot \cos \frac{2\pi \cdot t}{T_d} - \frac{\varphi \cdot 2\pi}{T_d} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_\varphi \cdot \cos \frac{2\pi \cdot t}{T_d} - \frac{\varphi \cdot 2\pi}{T_d} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d}$$

Segunda derivada, aceleración angular

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_\varphi \frac{2\pi}{T_d} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d} - \frac{\varphi \cdot 2\pi}{T_d} \cdot \frac{2\pi}{T_d} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_\varphi \frac{2\pi}{T_d} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d} - \frac{\varphi \cdot (2\pi)^2}{T_d^2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d}$$

que para $t = 0$, la aceleración angular tendrá por valor,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 \cdot \varphi}{T_d^2} \quad (3.14)$$

3.7.4 Velocidades angulares para la condición de buque adrizado

Se van a estudiar las velocidades angulares máxima y media para la condición de que el buque esté adrizado. Para $t = 0$, será

$$\theta = \varphi = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{\varphi}$$

Al ser $\varphi = 0$, la ecuación 3.13 se simplificará, quedando

$$\theta = \frac{\omega_{\varphi} \cdot T_d}{2\pi} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d} \quad (3.15)$$

Para este supuesto, el movimiento de balance tendrá la velocidad angular máxima cuando el buque esté adrizado, es decir, cuando la escora sea cero. Teniendo en cuenta el análisis de la ecuación 3.9, en el que se indican las condiciones de isocronismo y de variación de la velocidad angular media directamente proporcional al ángulo de escora máximo, se establecerá entre las velocidades angulares máxima y media la relación siguiente,

$$\omega_M = \frac{\pi}{2} \omega_m \quad (3.16)$$

ω_M velocidad angular máxima
 ω_m velocidad angular media

Siendo θ_M el ángulo máximo de balance, el ciclo completo de la oscilación correspondiente al período doble de balance será, por ejemplo,

buque adrizado	$\theta = 0$
buque escorado a estribor	$\theta = \theta_M$
buque adrizado	$\theta = 0$
buque escorado a babor	$\theta = \theta_M$
buque adrizado	$\theta = 0$

De acuerdo con lo visto, la velocidad angular media se obtendrá teniendo en cuenta que en una oscilación completa se recorre cuatro veces el ángulo máximo de balance, y dividiendo por el tiempo, que en este caso es el período doble de balance del buque. Por lo tanto, su ecuación será de la forma siguiente,

$$\omega_m = \frac{4 \cdot \theta_M}{T_d} \quad (3.17)$$

En la ecuación 3.16, al sustituir la velocidad angular media por el valor anterior deducido, se tendrá el valor de la velocidad angular máxima en función del ángulo máximo de escora y del período doble de balance,

$$\omega_M = \frac{\pi}{2} \omega_m = \frac{\pi}{2} \frac{4 \cdot \theta_M}{T_d}$$

$$\omega_M = \frac{2\pi \cdot \theta_M}{T_d} \quad (3.18)$$

Si en la ecuación 3.15, ω_φ se hace igual a ω_M ,

$$\theta = \frac{\omega_M \cdot T_d}{2\pi} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d}$$

Al ser, de acuerdo con la ecuación 3.18,

$$\theta_M = \frac{\omega_M \cdot T_d}{2\pi}$$

y sustituyendo, se tendrá la ecuación del balance a partir del ángulo máximo de escora y del período doble de balance,

$$\theta = \theta_M \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_d} \quad (3.19)$$

3.7.5 Ecuación del movimiento de balance sin resistencia

Si se toma como origen de los tiempos cuando el balance está en su ángulo máximo de escora, esto es, para

$$t = 0 \quad \theta = \theta_M \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_M}{dt} = 0$$

la ecuación 3.19 vendrá en función del coseno,

$$\theta = \theta_M \cdot \cos \frac{2\pi \cdot t}{T_d} \quad (3.20)$$

Siendo esta ecuación la del movimiento de balance suponiendo que no exista resistencia del agua, ni tampoco se considera la masa de agua añadida, estando el balance provocado por la acción de una fuerza perturbadora instantánea exterior que deja de actuar en el momento que el buque alcanza el ángulo máximo de escora bajo consideración.

3.8 Balance entre olas, sin resistencia

El paso siguiente en el estudio del balance consiste en suponer al buque entre olas regulares de longitud mucho mayor que su manga.

En el subapartado 2.4.3, al estudiar las superficies trocoidales, se ha visto que la fuerza resultante sobre una partícula de una superficie es normal al perfil de la trocoide en este punto. Sobre la carena del buque incidirán distintas superficies trocoidales en función de la longitud de la ola, (ya que las trocoides se consideran activas hasta una profundidad igual a la mitad de su longitud), y de su calado.

Un buque entre olas está sujeto a las mismas fuerzas hidrodinámicas que tendría la masa de agua que su carena ocupa. Se considera, teóricamente, que la dirección de la fuerza de empuje coincidirá con la normal a la trocoide que pasa por el centro de carena. En la práctica, el estudio del balance se hace sobre la normal a la trocoide de la superficie libre.

3.8.1 Balance absoluto y relativo

Se denomina balance absoluto de un buque entre olas, al ángulo entre la vertical y la línea central del buque, mientras que al ángulo entre la normal al perfil de la ola y la línea central recibe el nombre de balance relativo, (Fig. 3.4). Estos balances darán lugar a los ángulos de escora absoluto y relativo correspondientes, estableciéndose entre ellos la relación que se muestra en la ecuación siguiente,

$$\theta_0 = \theta - (\theta - \theta_0)$$

siendo,

θ_0 ángulo entre la vertical y la normal a la trocoide

θ ángulo de balance absoluto

$\theta - \theta_0$ ángulo de balance relativo

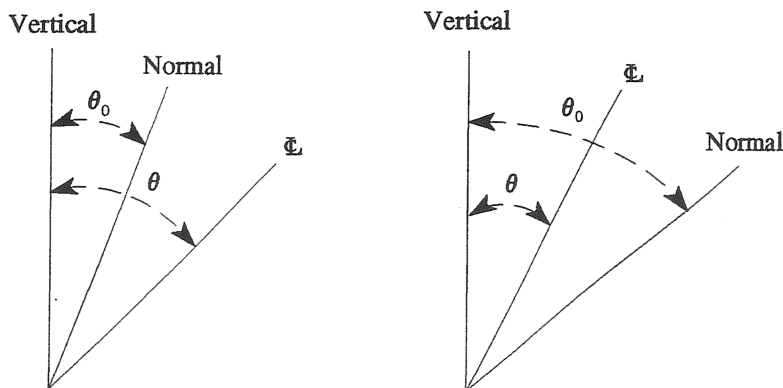


Fig. 3.4 Ángulos de balance absoluto y relativo

Para obtener de forma gráfica la normal al perfil de la ola se trabaja sobre el plano de inclinación transversal, (perpendicular al eje de inclinación longitudinal), que contiene al centro de carena correspondiente a la posición de adrizado del buque.

A continuación se exponen dos maneras prácticas de hallar la normal al perfil de la ola sobre el plano de inclinación, que se muestran en la figura 3.5.

- a) Se traza la normal a la tangente del perfil trocoidal en el punto de intersección de ésta con el plano diametral.
- b) Uniendo los puntos de intersección del perfil de la ola con los costados del plano de inclinación transversal, se obtendrá una pendiente media, a la que se traza la normal.

En el estudio del balance se supone que las olas son de longitud muy superior a la manga del buque, lo que hace que el perfil de la ola sobre la sección transversal sea prácticamente una línea recta. En consecuencia cualquiera de los dos métodos es válido. No es así cuando la longitud de la ola, aún siendo mayor que la manga, da lugar a un perfil de forma curva sobre la sección transversal, siendo entonces más fácil la aplicación del segundo método.

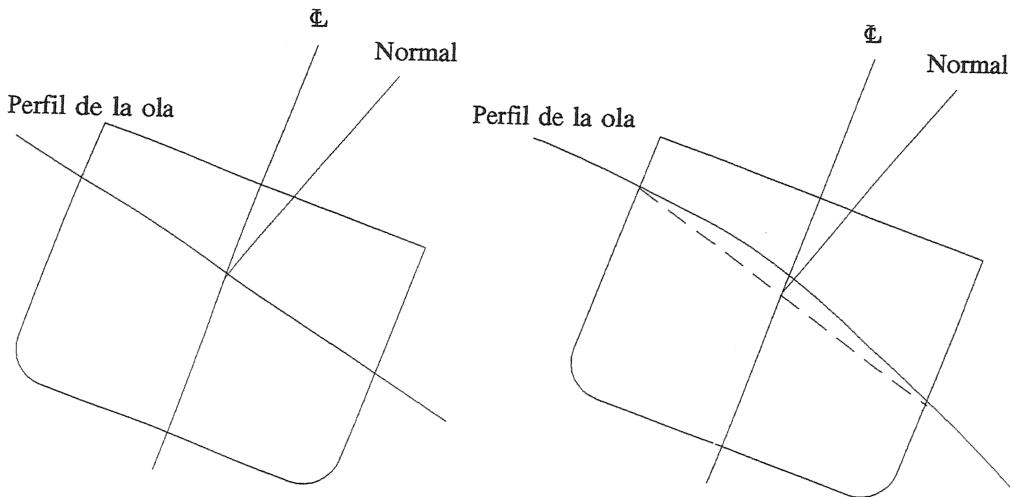


Fig. 3.5 Plano de inclinación transversal. Normales al perfil de la trocoide

3.8.2 Pendiente de la trocoide

En las ecuaciones 1.56 y 1.57 de la ola trocoidal, del capítulo primero, se estableció la relación siguiente,

$$\tan \theta_0 = \frac{r \cdot \sin \sigma}{R + r \cdot \cos \sigma}$$

En la figura 3.6, se observa que θ_0 es la pendiente de la trocoide, mientras que σ es el ángulo de giro de la circunferencia que la engendra, por lo tanto,

$$\sigma = \omega_w \cdot t = \frac{2\pi}{T_w} t$$

ω_w frecuencia de la ola
 T_w período de la ola

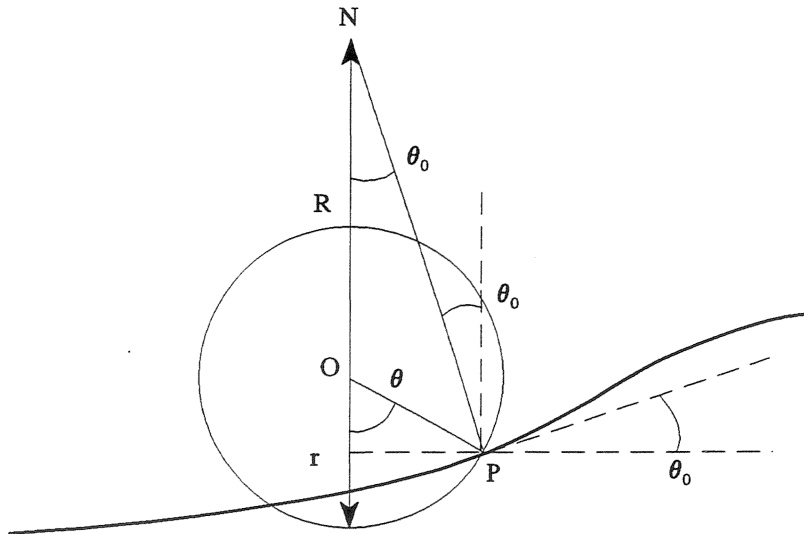


Fig. 3.6 Pendiente de la trocoide

Introduciendo el valor del ángulo de gira, σ , en la ecuación anterior, ésta quedará de la forma siguiente,

$$\tan \theta_0 = \frac{r \cdot \sin \frac{2\pi}{T_w} t}{R + r \cdot \cos \frac{2\pi}{T_w} t}$$

Sustituyendo los radios, r y R , de acuerdo con los valores dados en las ecuaciones 1.48 y 1.49,

$$H = 2r \qquad r = \frac{H}{2} = A$$

$$L = 2\pi \cdot R \qquad R = \frac{L}{2\pi}$$

En las que,

H altura de la ola
A amplitud de la ola
L longitud de la ola

$$\tan \theta_0 = \frac{A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_w} t}{\frac{L}{2\pi} + A \cdot \cos \frac{2\pi}{T_w} t}$$

Para valores de θ_0 pequeños, lo cual significa que la altura de la ola es pequeña en comparación con su longitud, y, en consecuencia, que r es pequeño con respecto a R , puede hacerse la simplificación siguiente,

$$\theta_0 = \frac{A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_w} t}{\frac{L}{2\pi}}$$

$$\theta_0 = A \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \sin \frac{2\pi}{T_w} t \quad (3.21)$$

3.8.3 Ecuación de la perturbación de la ola

Al incidir la ola sobre el buque, (Fig. 3.7), éste cambiará la forma de su carena, dando lugar a las cuñas de emersión e inmersión. Debido a ello actuará el par adrizante del buque, buscando el equilibrio en la normal de la trocoide, la cual, cambiará constantemente de orientación.

Dentro de la estabilidad inicial del buque, esto es, para pequeños ángulos de escora, el momento adrizante será,

$$M_a = D \cdot GM (\theta - \theta_0) \quad (3.22)$$

$$M_a = D \cdot GM \cdot \theta - D \cdot GM \cdot \theta_0$$

El término positivo del segundo miembro es el del momento adrizante del buque en aguas quietas, mientras que el segundo término, negativo, es el momento perturbador producido por la pendiente de la trocoide.

La ecuación 3.7 deducida para el movimiento de balance en aguas quietas, tomará, aquí, la forma

siguiente,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g \cdot GM}{k^2} (\theta - \theta_0) = 0 \quad (3.23)$$

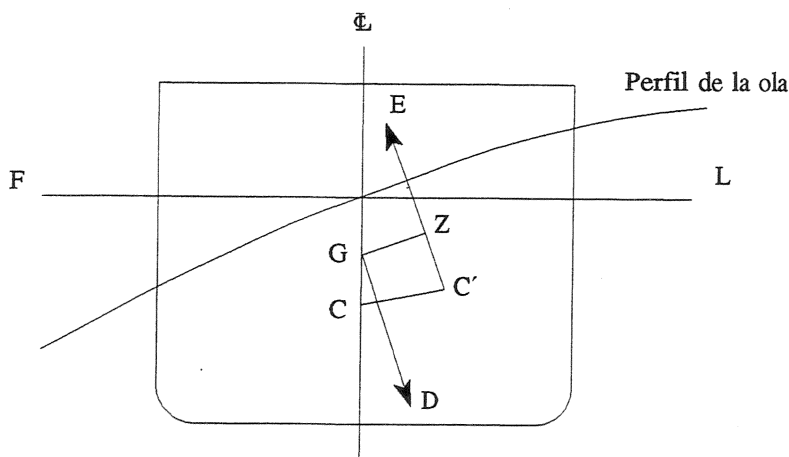


Fig. 3.7 Buque entre olas. Momento adrizante

Teniendo en cuenta la expresión que relaciona la frecuencia con la altura metacéntrica, (Ec. 3.8),

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot GM}{k^2}}$$

se establece la igualdad,

$$\frac{g \cdot GM}{k^2} = \frac{4\pi^2}{T_d^2} \quad (3.24)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.23,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_d^2} (\theta - \theta_0) = 0 \quad (3.25)$$

El valor del ángulo θ_0 de la pendiente de la trocoide, que a su vez es el ángulo entre la vertical y la normal, (Fig. 3.6), dado en la ecuación 3.21, se introduce en la ecuación anterior 3.25,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_d^2} \left(\theta - \frac{A \cdot 2\pi}{L} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_w} t \right) = 0 \quad (3.26)$$

En esta ecuación el momento perturbador está en función de la amplitud, de la longitud y del período de la ola.

El ángulo máximo entre la vertical y la normal de la trocoide se producirá entre cresta y seno, a la mitad de la pendiente. Matemáticamente para que en la ecuación 3.21 se produzca un valor absoluto máximo, deberá ser,

$$\theta_0 = A \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_w} t$$

$$\text{sen} \frac{2\pi}{T_w} t = \pm 1$$

A partir del buque adrizado esta circunstancia se producirá para los valores de t siguientes,

$$t = \frac{T_w}{4} \quad \text{sen} \frac{\pi}{2} = +1$$

$$t = \frac{3 T_w}{4} \quad \text{sen} \frac{3}{4} 2\pi = -1$$

$$t = \frac{5 T_w}{4} \quad \text{sen} \frac{5}{4} 2\pi = +1$$

.....

hacia una y otra banda. De otro modo, si en la ecuación 3.21 se toma el valor de $t = T_w/4$, se obtendrá el valor máximo, θ_{M0} , que tomará el ángulo de la pendiente θ_0 .

$$t = \frac{T_w}{4}$$

$$\theta_0 = \frac{A \cdot 2\pi}{L} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_w} \frac{T_w}{4}$$

$$\theta_0 = \frac{A \cdot 2\pi}{L} \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} \quad (3.27)$$

$$\theta_0 = \frac{A \cdot 2\pi}{L} = \theta_{MO} \quad (3.28)$$

Como consecuencia de todo ello, sustituyendo la variable, θ_0 , por su ángulo máximo en la ecuación 3.26, se obtendrá la ecuación del balance,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_d^2} \left(\theta - \theta_{MO} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_w} t \right) = 0 \quad (3.29)$$

Ecuación que puesta en función de las frecuencias del buque y de la ola, tendrá por expresión

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 (\theta - \theta_{MO} \cdot \text{sen} \omega_w \cdot t) = 0 \quad (3.30)$$

Finalmente, operando y suprimiendo el paréntesis,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta - \omega^2 \cdot \theta_{MO} \cdot \text{sen} \omega_w \cdot t = 0 \quad (3.31)$$

Los dos primeros términos de esta ecuación equivalen a la ecuación diferencial del movimiento armónico simple, (Ec. 3.3), y el tercer término

$$- \omega^2 \cdot \theta_{MO} \cdot \text{sen} \omega_w \cdot t \quad (3.32)$$

representa la fuerza perturbadora de la ola.

3.8.4 Solución a la ecuación del movimiento de balance entre olas

La solución de la ecuación diferencial del movimiento armónico simple, (Ec. 3.3), sirvió de base para obtener la ecuación del movimiento de balance del buque en aguas tranquilas, (Ec. 3.12). Para la condición de que cuando $t = 0$ fuera $\theta = \varphi$, ésta ecuación era,

$$\theta = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \text{sen} \omega \cdot t + \varphi \cdot \cos \omega \cdot t \quad (3.33)$$

Para el término negativo de la fuerza perturbadora se recurre a una solución particular en la que se toma,

$$\theta = C_K \cdot \text{sen} \omega_w \cdot t \quad (3.34)$$

$$C_K = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \quad (3.35)$$

Derivando en la ecuación 3.34 anterior el ángulo de balance con respecto al tiempo dos veces consecutivas, se obtendrá,

$$\frac{d\theta}{dt} = C_K \cdot \omega_W \cdot \cos \omega_W \cdot t$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - C_K \cdot \omega_W^2 \cdot \sen \omega_W \cdot t$$

Introduciendo el valor de esta aceleración en la ecuación 3.31 anterior, en la que previamente se despeja igualándose los dos tipos de movimiento, balance en aguas tranquilas y perturbador debido a la ola, en cada uno de sus miembros, se tendrá

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \sen \omega_W \cdot t \quad (3.36)$$

$$- C_K \cdot \omega_W^2 \cdot \sen \omega_W \cdot t + \omega^2 \cdot C_K \cdot \sen \omega_W \cdot t = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \sen \omega_W \cdot t$$

$$- C_K \cdot \omega_W^2 + C_K \cdot \omega^2 = \omega^2 \cdot \theta_{M0}$$

$$C_K (\omega^2 - \omega_W^2) = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \quad (3.37)$$

$$C_K = \frac{\omega^2 \cdot \theta_{M0}}{\omega^2 - \omega_W^2}$$

$$C_K = \frac{\theta_{M0}}{1 - \frac{\omega_W^2}{\omega^2}}$$

siendo,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_d} \quad y \quad \omega_W = \frac{2\pi}{T_W}$$

$$C_K = \frac{\theta_{M0}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \quad (3.38)$$

Lo que da la constante C_K en función del ángulo máximo entre la vertical y la normal a la pendiente, y de los períodos de balance del buque y de la ola. Sustituyendo en la ecuación 3.34,

$$C_K = \frac{\theta_{M0}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \text{sen } \omega_w \cdot t \quad (3.39)$$

Por tanto, la solución de la ecuación de balance del buque entre olas en un medio no resistente, a partir de las ecuaciones 3.33 y 3.39, tomará la forma siguiente,

$$\theta = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \text{sen } \omega \cdot t + \varphi \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{\theta_{M0}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \text{sen } \omega_w \cdot t \quad (3.40)$$

Esta ecuación del ángulo de balance absoluto tiene, por tanto, dos partes perfectamente diferenciadas. Los dos primeros términos del segundo miembro corresponden a la oscilación libre con el período natural del buque para la condición de carga que tenga, y el tercer término de este segundo miembro es la acción de la ola, función directa de su frecuencia, o lo que es lo mismo, inversamente proporcional al período de la ola. Este tercer término produce una balance forzado.

3.8.5 Efecto de la estabilidad inicial del buque sobre la aceleración angular del balance

Supongamos que un buque flotando en aguas tranquilas y adrizado, recibe una ola de través. La carena del buque cambiará de forma, según se ha visto en la figura 3.7, dando lugar a un par adrizante que hará escorar el buque, buscando sus palos la normal a la pendiente de la ola. Este contrasentido, par adrizante que hará escorar el buque, se puede explicar indicando que las cuñas formadas por el perfil de la ola con respecto a la horizontal de aguas tranquilas, crearán un par escorante que tenderá a que la línea central del buque siga a la perpendicular de la pendiente de la ola, lo que desde la perspectiva de la vertical, perpendicular a la horizontal del agua en calma, equivale a un balance, que en este caso recibe el nombre, como ya se ha indicado anteriormente, de balance absoluto. El perfil de la ola sobre la carena cambiará durante el proceso de paso seno-cresta-seno. La reacción del buque dependerá principalmente del valor de la estabilidad inicial y de la relación entre los períodos del buque y de la ola.

En el supuesto de que la estabilidad inicial del buque GM sea grande, el período doble de balance será pequeño. De las ecuaciones 3.9 y 3.5,

$$T_d = \frac{2\pi \cdot k}{\sqrt{g \cdot GM}}$$

$$I_g = \frac{D}{g} k^2$$

se deduce que,

$$T_d = 2\pi \sqrt{\frac{I_g}{D \cdot GM}} \quad (3.41)$$

Como consecuencia, también el módulo de estabilidad $D \cdot GM$ será un valor grande. Si en la ecuación 3.4,

$$I_g \frac{d^2\theta}{dt^2} + M_a = 0$$

se despeja la aceleración angular del balance, quedará

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{M_a}{I_g} \quad (3.42)$$

que tendrá un valor grande. En líneas generales, esto significará que la tendencia del buque será la de seguir la normal a la pendiente de la ola.

En el caso de un valor de GM pequeño, el período doble de balance será grande. Ahora, al analizar la ecuación 3.42 anterior, dará como resultado una aceleración pequeña. La reacción del buque al movimiento de balance producido por la pendiente de la ola será lenta, tendiendo a una oscilación de amplitud pequeña, o dicho de otro manera, manteniendo su cubierta más o menos horizontal, no siguiendo a la ola en su movimiento, lo que se considera que no es una buena condición marinera.

Otro análisis interesante es el de la relación de semejanza entre períodos de buques que a su vez sean semejantes.

A partir de la ecuación 3.41 aplicada a dos buques semejantes de razón λ , por lo tanto, estableciendo las relaciones siguientes entre las alturas metacéntricas, los desplazamientos y las inercias de las masas,

$$\frac{GM}{GM'} = \lambda \quad \frac{D}{D'} = \lambda^3 \quad \frac{I_g}{I'_g} = \lambda^5$$

se obtendrá la relación de semejanza entre los períodos dobles de balance,

$$T_d = 2\pi \sqrt{\frac{I_g}{D \cdot GM}}$$

$$T'_d = 2\pi \sqrt{\frac{I'_g}{D' \cdot GM'}}$$

$$\frac{T_d}{T'_d} = \sqrt{\frac{\lambda^5}{\lambda^4}} = \sqrt{\lambda}$$

$$T_d = T'_d \cdot \sqrt{\lambda} \quad (3.43)$$

Lo que nos dice que para buques semejantes geométricamente y también en cuanto a la distribución de las masas y a la estabilidad, el período doble de balance es mayor en el buque de más tamaño. Llevando esta deducción a la práctica, se puede generalizar indicando que los movimientos de balance de los buques grandes serán más lentos que los de los buques pequeños, y que estos últimos tenderán a que sus balances sean rápidos.

3.8.6 Oscilación forzada

Un buque que esté sometido a un balance forzado debido al paso de olas regulares de través, terminaría, con el tiempo, oscilando según el período constante de las olas en lugar de su período natural. Sin embargo debido a la falta de regularidad, tanto en el espacio como en el tiempo, y a la tendencia del buque a oscilar en su frecuencia natural, el período de balance del buque no tendrá un valor constante.

Siguiendo con el análisis teórico planteado, se aísla el término de la oscilación forzada de la ecuación 3.40,

$$\theta_f = \frac{\theta_{MO}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \cdot \text{sen } \omega_w \cdot t$$

θ_f componente del balance forzado

Sustituyendo la frecuencia de la ola por su período,

$$\theta_f = \frac{\theta_{MO}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{T_w} \quad (3.44)$$

Cuando el tiempo, t , tenga por valores

$$t = \frac{T_w}{4} \quad t = \frac{3}{4} T_w \quad t = \frac{5}{4} T_w \quad \dots$$

el balance forzado tendrá sus valores máximos,

$$\theta_f = \pm \frac{\theta_{MO}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \quad (3.45)$$

Si, tal como se ha indicado al principio, el período doble de balance terminase tomando el valor de la oscilación forzada debido a las olas, resultaría que,

$$T_d = T_w$$

El balance máximo de la ecuación 3.42 tendería a infinito,

$$\theta_{Mf} = \pm \frac{\theta_{MO}}{0} = \pm \infty$$

Es decir, los balances dados por el buque serían cada vez mayores hasta que acabaría dando la vuelta, siendo éste el efecto producido por la igualdad entre los dos períodos, el de balance y el de la ola, o lo que es lo mismo, el balance del buque habría entrado en sincronismo con el movimiento de la ola.

Volviendo a la ecuación 3.41 anterior del ángulo de balance forzado, derivando con respecto al tiempo, y teniendo en cuenta que la frecuencia de la oscilación forzada, ω_f , es precisamente esta derivada,

$$\frac{d\theta_f}{dt} = \omega_f$$

se obtendrá su ecuación en función de los períodos de balance y de la ola, de la pendiente máxima de la ola y del tiempo, siendo ésta

$$\omega_f = \frac{2\pi}{T_w} \cdot \frac{\theta_{MO}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \cdot \cos \frac{2\pi \cdot t}{T_w} \quad (3.46)$$

3.9 Movimiento del buque entre olas debido al balance

A continuación se plantearán dos casos de movimiento del buque con balance, en los que se tiene en cuenta el valor relativo entre los períodos doble de balance y de la ola, éstos son: $T_d < T_w$ y $T_d > T_w$. El caso especial en que los períodos sean de igual valor, lo cual tiene efectos muy importantes tal y como ya se ha visto, se estudiará con mayor profundidad más adelante. El análisis teórico-práctico del movimiento del buque entre olas, si bien ayuda a su comprensión, está sujeto a condiciones iniciales y supuestos, por lo tanto, hay que entenderlo como una orientación de su comportamiento con olas de través.

Si se toman como períodos de las olas los porcentualmente más usuales, puede aceptarse de forma general dentro del buque mercante de tamaño medio y grande que en el primer caso, período doble de balance menor que el período de la ola, la altura metacéntrica será muy grande, mientras que en el segundo caso en el cual el período doble tendrá un valor mayor, comparado con el primero, se puede suponer una altura metacéntrica de valor medio.

Las condiciones y las suposiciones bajo las cuales se realiza el estudio de los dos casos propuestos son las siguientes:

- Para cada uno de los dos casos previstos se presentan en gráficas separadas la oscilación libre con el período natural del buque, período doble de balance, y la oscilación forzada con el período de la ola.
- La representación gráfica del balance forzado se inicia a la mitad de la pendiente de la ola, que será para $t = \frac{1}{4}T_w$, por lo tanto, con el ángulo máximo de oscilación forzada, y con este mismo ángulo de escora para la oscilación libre.
- La tendencia del buque en la oscilación forzada es la de seguir con sus palos a la normal de la ola, con mayor o menor celeridad en función de que tenga un mayor o menor valor de altura metacéntrica. No obstante en los gráficos, dado su carácter orientativo de la tendencia del movimiento del buque, sus palos coinciden con la normal en la cresta y en el seno, por tanto, en estas posiciones, la vertical del agua en calma, la normal a la pendiente de la ola y la línea central o de crujía del buque, coinciden.
- Debido al interés de orden práctico que se le encuentra a la ilustración del balance del buque, aunque sea separando los efectos de las oscilaciones forzada y libre, se presenta cada uno de los casos para una relación concreta, a modo de ejemplo individualizado y no necesariamente representativo de su grupo, pero que nos sitúa en el complejo problema del balance entre olas y las distintas posiciones que ocuparía el buque en unas circunstancias determinadas.

Primer caso. Balance de $T_d < T_w$

Se toma como ejemplo una relación de 0,5, esto es,

$$\frac{T_d}{T_w} = 0,5 \quad T_d = \frac{T_w}{2}$$

En la figura 3.8 se representa en la parte superior a la oscilación forzada del buque entre olas, y en la parte inferior a la oscilación libre debida a una fuerza externa momentánea. La longitud de la figura corresponde al período de la ola y, por lo tanto, a dos veces el período doble de balance del buque. La numeración del 1 al 9, en este caso, servirá para identificar las distintas posiciones del buque durante el balance en cada uno de los modos de oscilación, forzada y libre.

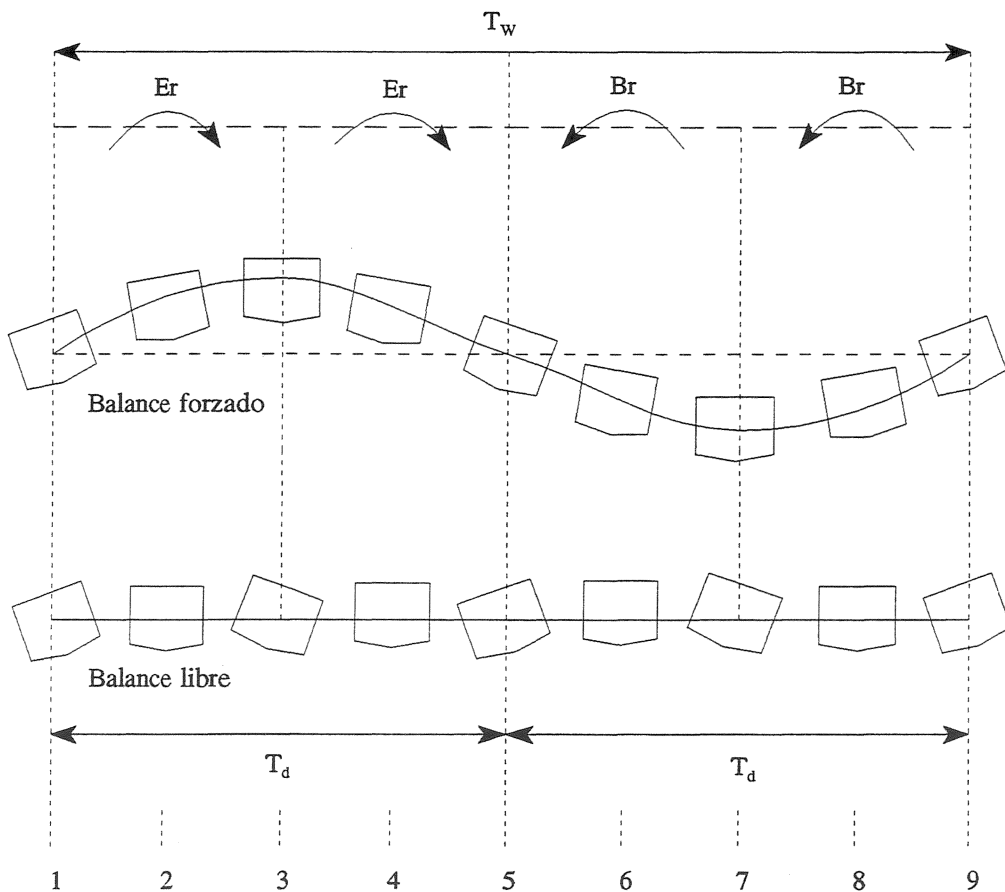


Fig. 3.8 Balances forzado y libre, $T_d < T_w$

A continuación se van a describir los dos movimientos forzado y libre del buque, primero separadamente y después comparándolos e identificando los tramos del período de la ola en los que ambas oscilaciones actúan en el mismo sentido, y aquellos en que lo hacen en sentidos de giro opuestos.

La oscilación se inicia a la mitad de la pendiente de la ola, con el ángulo máximo de balance forzado, y suponiendo el mismo ángulo de balance para la oscilación libre con la mar quieta. Durante el período doble de balance, el buque realizará una oscilación libre completa, estribor-adrizado-estribor-babor-adrizado-babor, que corresponde al intervalo de tiempo desde las posiciones 1 a la 5. En este mismo tiempo, $T_d = T_w/2$, la oscilación forzada del buque, debido al efecto de la pendiente de la ola, irá disminuyendo la escora alcanzada a babor, es decir, estará iniciando su balance a estribor, posiciones 1 a 3, quedando, en la posición 3, adrizado en la cresta de la ola, continuando el balance a estribor, descendiendo por la pendiente de la ola, y alcanzando su máximo ángulo a la mitad de la misma, en la posición 5.

La oscilación libre repetirá de nuevo el proceso entre las posiciones 5 a la 9, mientras que la oscilación forzada realizará su segunda mitad. A partir de la posición 5 iniciará el balance a babor, pasando por el seno de la ola con el buque adrizado, y proseguirá su balance a babor hasta alcanzar su valor máximo a la mitad de la pendiente ascendente, en la posición 9.

Si se comparan las dos oscilaciones, forzada y libre, del ejemplo expuesto, se verá que a veces van en el mismo sentido de giro y otras en sentidos contrarios. En la tabla 3.1 se muestra este proceso con más detalle.

Tabla 3.1 Balances forzada y libre, $T_d < T_w$

Posiciones	Oscilación forzada	Oscilación libre	Sentido de giro
1-3	Er	Er	Mismo
3-5	Er	Br	Opuestos
5-7	Br	Er	Mismo
7-9	Br	Br	Opuestos

Segundo caso. Balance de $T_d > T_w$

La relación entre ambos períodos de este segundo ejemplo es,

$$\frac{T_d}{T_w} = 1,5$$

representados en la figura 3.9. En ella y en su parte superior se encuentra la oscilación forzada, y en

la inferior la oscilación libre, al igual que en el caso anterior. La longitud de la figura corresponde al período doble de balance del buque, por tanto, dando cabida a 1,5 períodos de la ola. En este caso la identificación de las distintas posiciones del buque, equidistantes, representadas sobre el perfil de la ola o como oscilación libre, van desde la número 1 a la número 13.

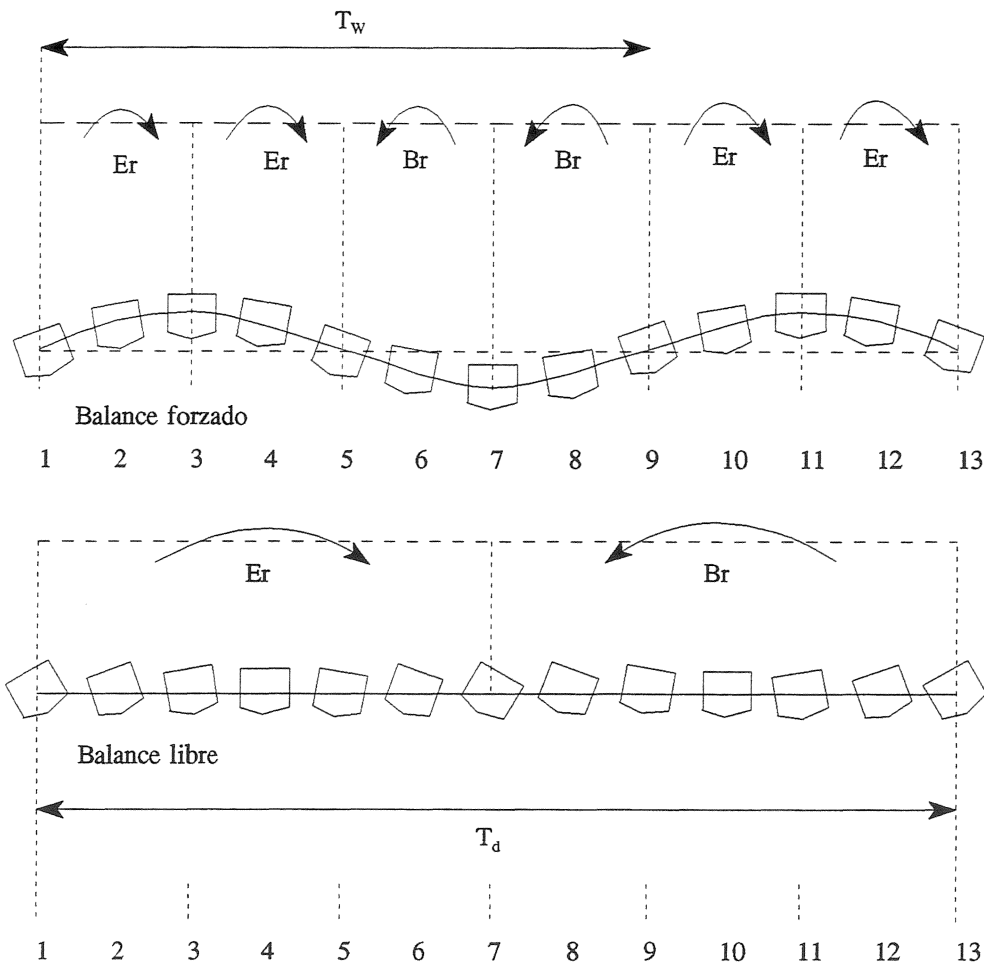


Fig. 3.9 Balances forzado y libre, $T_d > T_w$

Al igual que antes, la condición inicial en ambas oscilaciones es para el ángulo máximo de balance (a babor) a la mitad de la pendiente ascendente de la ola. El buque oscilando libremente realizará un ciclo completo, mientras que en modo forzado hará un ciclo y medio. En la tabla 3.2 se indica para cada posición el sentido de giro en oscilación forzada y en oscilación libre, dándose como información adicional las posiciones en las que el buque estará adrizado o alcanzará un ángulo máximo de escora a babor o a estribor.

Tabla 3.2 Balances forzado y libre, $T_d > T_w$

Posición	Oscilación forzada	Condición	Oscilación libre	Condición	Sentido de giro
1	Er	θ_{Mf} Br	Er	θ_{Mf} Br	Mismo
2	Er		Er		Mismo
3	Er	Adrizado	Er		Mismo
4	Er		Er	Adrizado	Mismo
5	Br	θ_{Mf} Er	Er		Opuestos
6	Br		Er		Opuestos
7	Br	Adrizado	Br	θ_{Mf} Er	Mismo
8	Br		Br		Mismo
9	Er	θ_{Mf} Br	Br		Opuestos
10	Er		Br	Adrizado	Opuestos
11	Er	Adrizado	Br		Opuestos
12	Er		Br		Opuestos
13	Br	θ_{Mf} Er	Er	θ_{Mf} Br	Opuestos

3.10 Sincronismo transversal

El tercer caso a analizar es cuando se cumple la condición de que el período de balance y el período de la ola son iguales,

$$T_d = T_w$$

Partiendo del buque adrizado en el seno de la ola, éste recibirá el efecto de la pendiente e iniciará el proceso de balance, de acuerdo con la oscilación forzada, por tanto, en la ecuación 3.40,

$$\theta = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \text{sen } \omega \cdot t + \varphi \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{\theta_{Mo}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \text{sen } \omega_w \cdot t$$

Los términos debidos al movimiento de balance del buque en aguas tranquilas, oscilación libre, se igualarán a cero,

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \text{sen } \omega \cdot t + \varphi \cdot \cos \omega \cdot t$$

quedando que el ángulo de balance será el del balance forzado,

$$\theta = \frac{\theta_{M0}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \text{sen } \omega_w \cdot t \quad (3.47)$$

Al ser $T_d = T_w$, la ecuación anterior se reduce a,

$$\theta = \frac{\theta_{M0}}{0} \text{sen } \omega_w \cdot t$$

Para resolver la ecuación 3.47, se supone una solución particular en la que

$$\theta = C_K \cdot t \cdot \cos \omega_w \cdot t \quad (3.48)$$

El proceso que se va seguir es hallar para la ecuación anterior la segunda derivada con respecto al tiempo, para posteriormente introducir su valor en la ecuación diferencial del buque entre olas, (Ec. 3.36), siendo ésta,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \text{sen } \omega_w \cdot t$$

en la que θ_{M0} es el valor máximo que tomará el ángulo de la pendiente, θ_0 , lo cual ocurre a la mitad de la pendiente de la ola, o sea, para $t = \frac{1}{4}T_w$.

Derivando por dos veces la ecuación 3.48,

$$\frac{d\theta}{dt} = C_K \cdot \cos \omega_w \cdot t - C_K \cdot t \cdot \omega_w \cdot \text{sen } \omega_w \cdot t$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C_K \cdot \omega_w \cdot \text{sen } \omega_w \cdot t - C_K \cdot \omega_w \cdot \text{sen } \omega_w \cdot t - C_K \cdot t \cdot \omega_w^2 \cdot \cos \omega_w \cdot t$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2 C_K \cdot \omega_W \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t - C_K \cdot t \cdot \omega_W^2 \cdot \cos \omega_W \cdot t \quad (3.49)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial del buque entre olas, $d^2\theta/dt^2$ y θ por las ecuaciones dadas en 3.49 y 3.48, respectivamente,

$$\begin{aligned} -2C_K \cdot \omega_W \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t - C_K \cdot t \cdot \omega_W^2 \cdot \cos \omega_W \cdot t + \omega^2 \cdot C_K \cdot t \cdot \cos \omega_W \cdot t = \\ = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t \end{aligned}$$

Al ser $T_d = T_w$, también será $\omega = \omega_W$. Teniendo esto en cuenta, el segundo y el tercer término del primer miembro se anulan, quedando

$$-2C_K \cdot \omega_W \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t$$

Eliminando términos iguales,

$$-2C_K = \omega \cdot \theta_{M0}$$

$$C_K = -\frac{\theta_{M0}}{2} \cdot \omega \quad (3.50)$$

Quedando la solución particular de la ecuación 3.48 de la forma siguiente,

$$\theta = -\frac{\theta_{M0}}{2} \cdot \omega \cdot t \cdot \cos \omega_W \cdot t \quad (3.51)$$

La ecuación del movimiento de balance sin resistencia y con olas regulares para el caso particular de $T_d = T_w$, tomará la forma siguiente

$$\theta = \theta_{\text{libre}} + \theta_{\text{forzada}}$$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \text{sen } \omega \cdot t + \varphi \cdot \cos \omega \cdot t - \frac{\theta_{M0}}{2} \omega \cdot t \cdot \cos \omega_W \cdot t \quad (3.52)$$

de acuerdo con la ecuación 3.33, movimiento de balance del buque en aguas tranquilas, y según la ecuación 3.51 deducida para la condición de sincronismo.

Para analizar el término del balance forzado se sustituirá la frecuencia por el período,

$$T_d = T_w = T \quad \omega = \omega_w = \frac{2\pi}{T}$$

$$\theta = - \frac{\theta_{MO}}{2} \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad (3.53)$$

$$\theta = - \theta_{MO} \frac{\pi}{T} \cdot t \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad (3.54)$$

Dando valores a t, se obtendrán los ángulos de balance del buque en función del ángulo máximo de la pendiente, (Figs. 3.10 y 3.11). Los valores de t elegidos, para los que se calcula el ángulo de balance son,

$$t = \frac{1}{2}T \quad t = T \quad t = \frac{3}{2}T \quad t = 2T \quad t = \frac{1}{2}T + n \cdot T \quad t = n \cdot T$$

siendo n un número entero.

$$a) \quad t = \frac{1}{2}T$$

$$\theta = - \theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}$$

Suprimiendo términos iguales

$$\theta = - \theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi$$

$$\theta = \theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$b) \quad t = T$$

$$\theta = - \theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot T \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot T$$

Suprimiendo términos iguales,

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \pi \cdot \cos 2\pi$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \pi$$

$$c) \quad t = \frac{3}{2}T$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \frac{3T}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{2}$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \cos 3\pi$$

$$\theta = \theta_{MO} \cdot \frac{3\pi}{2}$$

$$d) \quad t = 2T$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot 2T \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot 2T$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot 2\pi \cdot \cos 4\pi$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot 2\pi$$

$$e) \quad t = \frac{1}{2}T + n \cdot T$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \frac{\pi}{T} \left(\frac{1}{2}T + n \cdot T \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{2}T + n \cdot T \right)$$

$$\theta = -\theta_{MO} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} + n \right) \cdot \cos \pi (1 + 2n)$$

$$\theta = \theta_{MO} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

o bien,

$$\theta = \frac{1}{2} \theta_{M0} \cdot \pi (1 + 2n)$$

f) $t = n \cdot T$

$$\theta = - \theta_{M0} \cdot \frac{\pi}{T} n \cdot T \cdot \cos \frac{2\pi}{T} n \cdot T$$

$$\theta = - \theta_{M0} \cdot n \cdot \pi \cdot \cos n \cdot 2\pi$$

$$\theta = - \theta_{M0} \cdot n \cdot \pi$$

En definitiva, para cada medio período la escora aumenta en

$$\frac{1}{2} \theta_{M0} \cdot \pi$$

Dado que el período es teóricamente constante, la velocidad angular será mayor cada vez que el buque pase por la posición de adrizado.

En la figura 3.10 se representa el movimiento de balance del buque cuando entra en sincronismo transversal, y en la figura 3.11 las amplitudes crecientes del ángulo de balance.

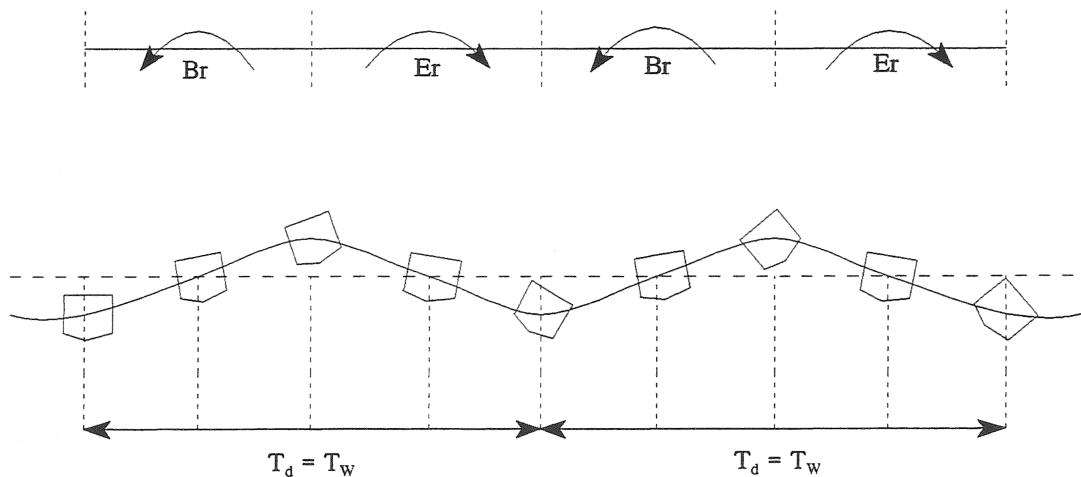


Fig. 3.10 Balance del buque entre olas. Sincronismo transversal

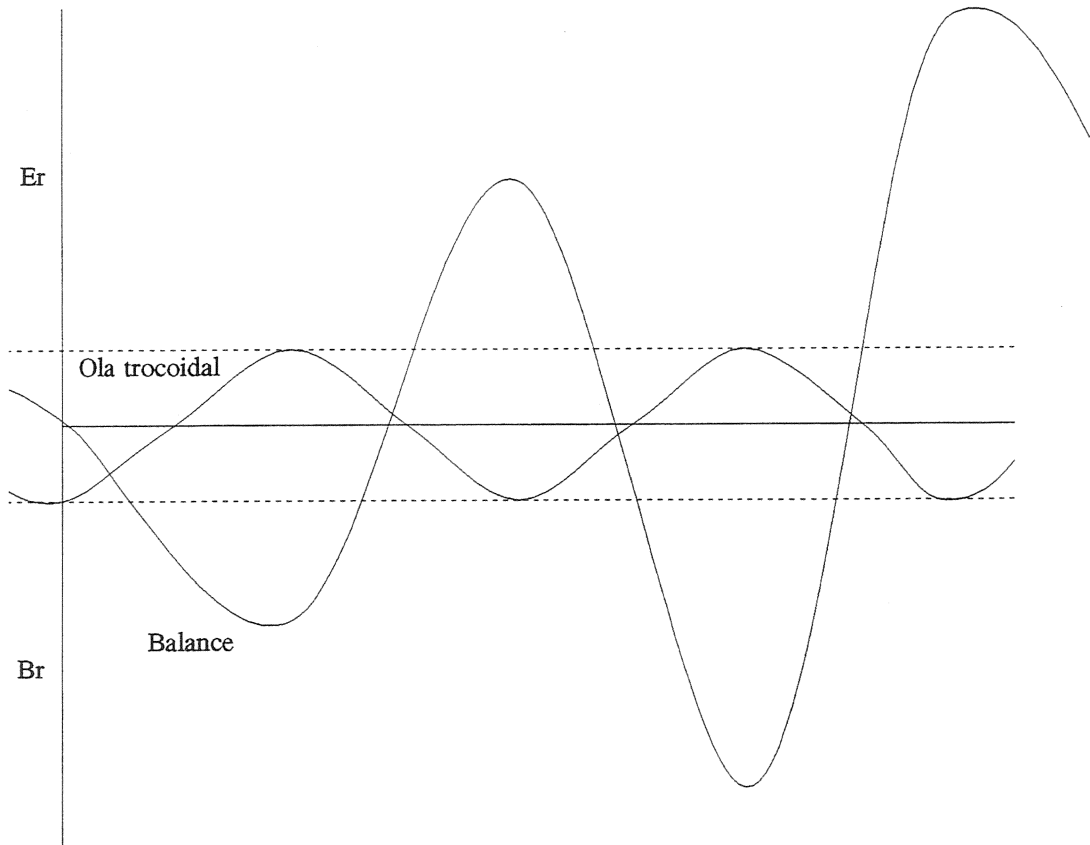


Fig. 3.11 Sincronismo transversal. Amplitudes del ángulo de balance

3.11 Balance en aguas tranquilas, con resistencia

En el apartado 3.7 se ha estudiado la resistencia del buque en aguas tranquilas y sin resistencia. En él se indicaba que la fuerza perturbadora era una fuerza exterior y momentánea productora de un par escorante al que se oponía el momento adrizante del buque. La escora máxima quedaba determinada por el corte entre las correspondientes curvas dinámicas. El movimiento de balance se repetiría indefinidamente, teniendo su amplitud un valor constante.

Sin embargo, en la realidad existe resistencia de los medios agua y aire sobre el balance, por lo que la amplitud de la oscilación se va amortiguando hasta que el buque quede nuevamente en reposo. Los distintos tipos de resistencia que se oponen al movimiento del buque pueden agruparse, entonces, en las debidas a los fluidos agua y aire. Vamos a considerar separadamente cada una de ellos.

A) Resistencia al agua

1. Resistencia de fricción entre la superficie mojada del casco y el agua debido a la

viscosidad de la misma. Esta resistencia es directamente proporcional a la densidad del agua que aumentará con la profundidad, al área de la superficie mojada y al cuadrado de la velocidad angular de balance del buque, según la fórmula de Froude

$$R_f = k_f \cdot \gamma \cdot S_m \cdot v^2$$

R_f	resistencia de fricción del buque
k_f	coeficiente de fricción
γ	densidad
S_m	superficie mojada
v	velocidad lineal

Por su parte, la velocidad lineal es igual al radio de giro por la velocidad angular,

$$v = r \frac{d\theta}{dt}$$

r radio de giro. Distancia media de la superficie mojada al eje de giro

Substituyendo en la fórmula de Froude se obtendrá la aplicación de la misma a la resistencia del buque por balance,

$$R_{fb} = k_{fb} \cdot \gamma \cdot S_m \cdot r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Siendo R_{fb} y k_{fb} , la resistencia y el coeficiente de fricción al y del balance.

2. La energía gastada en las olas de radiación creadas por el buque en la superficie libre de la mar, al actuar en su movimiento de balance como generador de olas a babor y estribor, (Fig. 3.12).

3. El efecto del casco sobre la masa de agua envolvente con zonas de sobrepresión y depresión, que en la figura 3.12 se han simplificado a las zonas de los pantoques, con la consiguiente formación de torbellinos.

4. Creación de torbellinos por los apéndices del casco.

B) Resistencia del aire

Sobre la obra muerta del buque se pueden considerar resistencias similares a las de la obra viva. Sin embargo, su escaso valor y, por lo tanto, su efecto prácticamente nulo en el amortiguamiento del balance, hace que la resistencia del aire se pueda desestimar.

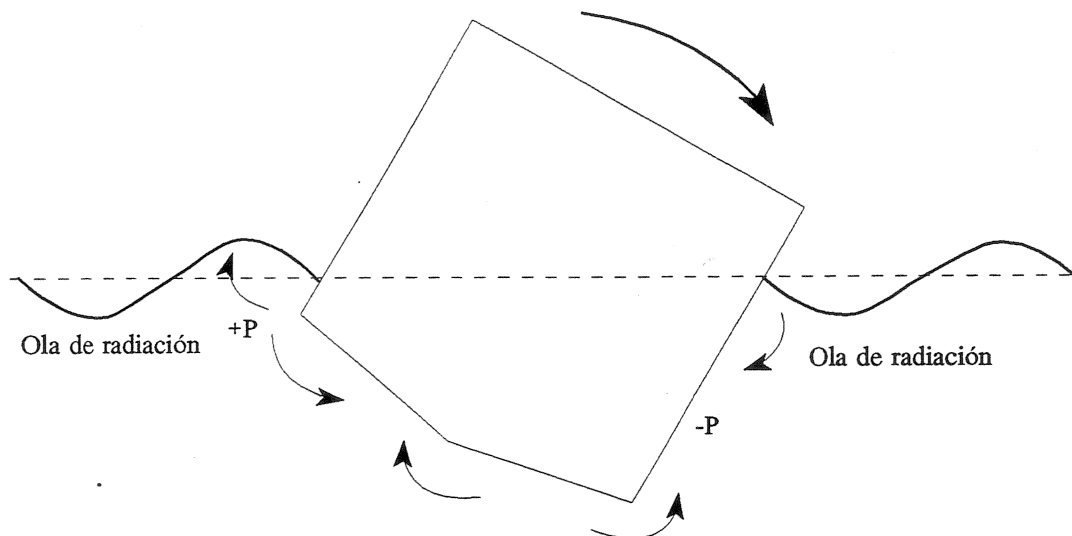


Fig. 3.12 Olas de radiación y zonas de sobrepresión y depresión

3.11.1 Disminución del balance

Supongamos que una fuerza externa escora el buque a estribor hasta un ángulo máximo θ_{Er} . Al retirar la fuerza perturbadora el buque oscila libremente, entrando en acción las distintas resistencias enumeradas, cuyo efecto es el de disminuir progresivamente la amplitud del balance hasta desaparecer, (Fig. 3.13). Por lo tanto, el balance del buque no tendrá eje de simetría, ya que la primera escora a estribor será mayor que la primera escora a babor, y ésta a su vez mayor que la segunda escora a estribor, y así sucesivamente hasta extinguirse el balance.

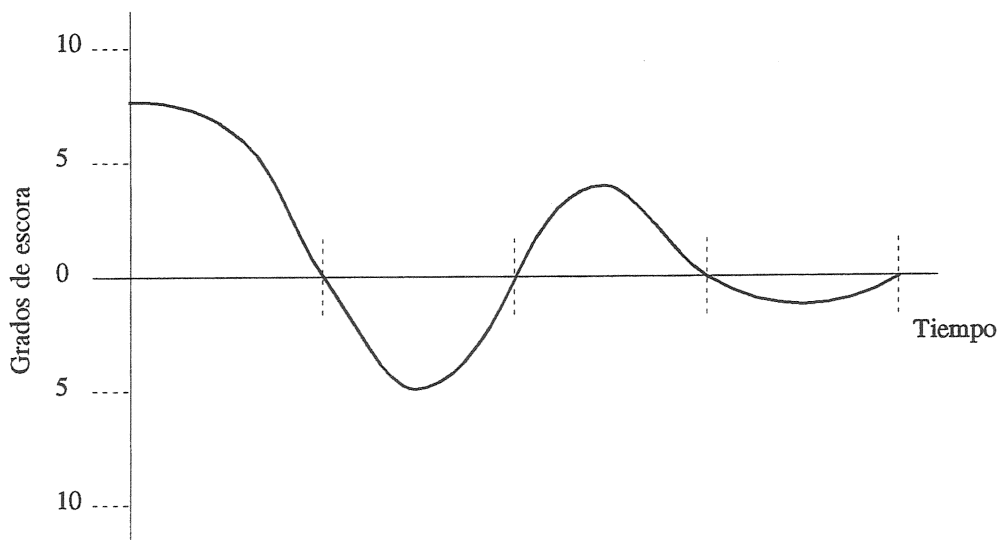


Fig. 3.13 Amortiguación del balance

El momento adrizante para ángulos de escora dentro de la estabilidad inicial, (Ec. 3.6), es

$$M_a = D \cdot GM \cdot \theta$$

Los ángulos máximos de escora a estribor y babor pueden expresarse con las ecuaciones de las dinámicas correspondientes, ya que el ángulo de equilibrio entre las curvas dinámicas adrizante y escorante limita el máximo valor de la escora, supuesto el buque en aguas quietas y sin resistencia. Estas ecuaciones serán,

$$ED_{Er} = \int_0^{\theta_{Er}} D \cdot GM \cdot \theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \Delta \cdot GM \cdot (\theta_{Er})^2 \quad (3.47)$$

$$ED_{Br} = \int_{\theta_{Br}}^0 D \cdot GM \cdot \theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \Delta \cdot GM \cdot (\theta_{Br})^2 \quad (3.48)$$

ED_{Er} estabilidad dinámica medida desde la condición de adrizado hasta la escora a estribor

ED_{Br} estabilidad dinámica desde el buque adrizado hasta la escora a babor

Después de una oscilación simple, Er-Br, la diferencia entre las dinámicas para los dos ángulos de escora máximos alcanzados a una y otra banda, será la energía absorbida por la resistencia de los medios agua y aire al balance del buque,

$$\delta ED = ED_{Er} - ED_{Br} = \frac{1}{2} D \cdot GM \cdot (\theta_{Er}^2 - \theta_{Br}^2)$$

$$\delta ED = \frac{1}{2} D \cdot GM \cdot (\theta_{Er} + \theta_{Br}) (\theta_{Er} - \theta_{Br}) \quad (3.49)$$

Haciendo,

$$\frac{\theta_{Er} + \theta_{Br}}{2} = \theta_m \quad (3.50)$$

$$\theta_{Er} - \theta_{Br} = \delta\theta \quad (3.51)$$

la diferencia entre las dinámicas quedará igual a,

$$\delta ED = D \cdot GM \cdot \theta_m \cdot \delta\theta \quad (3.52)$$

siendo $\delta\theta$ la disminución del balance para una oscilación simple.

3.11.2 Período doble de balance para aguas tranquilas y con resistencia

Al estudiar el balance en aguas tranquilas y sin resistencia, en la ecuación 3.4 se expresaba la igualdad entre los momentos que intervenían en el buque y el momento de las fuerzas de inercia. Debido a no considerar la resistencia, los momentos del buque quedaban reducidos al momento adrizante del mismo. En el caso actual, hay oscilaciones que son isócronas y ángulos de balance que van disminuyendo de valor debido a la resistencia de los medios agua y aire.

Para definir el momento resistente se hará un planteamiento sencillo. En la ecuación 3.52, diferencia entre las curvas dinámicas de la estabilidad del buque a una y otra banda, se ha visto que la resistencia es proporcional a la escora. Los ángulos de escora irán disminuyendo, con lo que también lo hará la resistencia, ya que los demás parámetros, desplazamiento y altura metacéntrica, son valores constantes para una condición determinada de carga. Debido al isocronismo disminuirá también la velocidad angular, con lo que se concluye indicando que el momento resistente es linealmente proporcional a la velocidad angular del balance del buque. La aproximación es suficientemente válida para establecer la relación que existe entre los períodos dobles de balance del buque con y sin resistencia.

En la ecuación del movimiento con resistencia en aguas tranquilas intervendrán, por tanto, las fuerzas de inercia, las de resistencia de los medios agua y aire, y el par de adrizamiento del buque,

$$I_g \frac{d^2\theta}{dt^2} + A_R \frac{d\theta}{dt} + D \cdot GM \cdot \theta = 0 \quad (3.53)$$

A_R coeficiente de amortiguamiento

A continuación se van a realizar una serie de transformaciones de la ecuación 3.53 con el objetivo final de obtener, tal como se ha indicado, la relación entre los períodos de balance.

Dividiendo la ecuación 3.53 por el momento de inercia, I_g , de la masa del buque alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro de gravedad,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{A_R}{I_g} \frac{d\theta}{dt} + \frac{D \cdot GM}{I_g} \cdot \theta = 0 \quad (3.54)$$

siendo la inercia, (Ec. 3.5),

$$I_g = \frac{D}{g} \cdot k^2$$

Haciendo por conveniencia operativa,

$$2\lambda = \frac{A_R}{I_g} = \frac{A_R \cdot g}{D \cdot k^2} \quad (3.55)$$

y sustituyendo en la ecuación 3.54,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{D \cdot GM}{\frac{D}{g} \cdot k^2} \cdot \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g \cdot GM}{k^2} \cdot \theta = 0 \quad (3.56)$$

Recuperando la ecuación 3.8,

$$\omega^2 = \frac{g \cdot GM}{k^2}$$

e introduciéndola en la ecuación 3.56, ésta quedará así,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \cdot \theta = 0 \quad (3.57)$$

que es la ecuación diferencial del movimiento con resistencia en aguas tranquilas. Siguiendo los estudios de los movimientos oscilatorios amortiguados, se hace uso de la ecuación auxiliar necesaria para el análisis y posterior tratamiento de la ecuación 3.57. Ésta es de la forma siguiente,

$$m^2 + 2\lambda \cdot m + \omega^2 = 0 \quad (3.58)$$

cuyas soluciones son,

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4\omega^2}}{2}$$

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \quad (3.59)$$

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \quad (3.60)$$

La diferencia $(\lambda^2 - \omega^2)$ dará lugar a tres casos diferentes del problema con soluciones, también,

diferentes. Se van a examinar las tres posibilidades, desarrollándose la que corresponde al movimiento de balance.

Caso 1. $(\lambda^2 - \omega^2) > 0$

El coeficiente de amortiguamiento, A_R , será grande, llevando a un sistema sobreamortiguado. La solución de la ecuación 3.57 es del tipo,

$$\theta = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot t}$$

Sustituyendo m por sus raíces, la ecuación anterior quedará,

$$\theta = e^{-\lambda \cdot t} \left[c_1 \cdot e^{+\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \cdot t} \right]$$

La gráfica de esta ecuación representa un movimiento suave y no oscilatorio.

Caso 2. $(\lambda^2 - \omega^2) = 0$

Al igual que en el caso 1, su ecuación representa un movimiento no oscilatorio, sin embargo, cualquier disminución de la fuerza amortiguadora, aquí representada por λ , convertiría el valor de la resta en negativo, (caso 3), por lo que esta condición recibe el nombre de críticamente amortiguada. La solución de la ecuación 3.57 es,

$$\theta = c_1 \cdot e^{m_1 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{m_2 \cdot t}$$

$$\theta = e^{-\lambda \cdot t} (c_1 + c_2 \cdot t)$$

Caso 3. $(\lambda^2 - \omega^2) < 0$

Al ser un valor negativo, las raíces de m_1 y m_2 , ecuaciones 3.59 y 3.60 respectivamente, serán negativas, y, consecuentemente, darán números complejos.

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \cdot i \quad (3.61)$$

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \cdot i \quad (3.62)$$

La solución general de la ecuación diferencial del movimiento con resistencia en aguas tranquilas, (Ec. 3.57), es de la forma

$$\theta = e^{-\lambda \cdot t} \left[c_1 \cdot \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \cdot t + c_2 \cdot \text{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \cdot t \right] \quad (3.63)$$

La ecuación anterior describe un movimiento oscilatorio, propio, por lo tanto, del movimiento de balance. Este sistema recibe el nombre de subamortiguado. En definitiva este tercer caso es el de interés para seguir con el estudio.

Haciendo en la ecuación 3.63,

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \lambda^2 \quad (3.64)$$

$$\theta = e^{-\lambda \cdot t} \left[c_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t + c_2 \cdot \text{sen} \omega_1 \cdot t \right] \quad (3.65)$$

Se determinamos que para $t = 0$, el ángulo de balance alcanza un valor máximo θ_M , entonces, la velocidad angular será cero, es decir,

$$\text{para } t = 0 \quad y \quad \theta = \theta_M \quad \text{será} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

En la ecuación 3.65, para $t = 0$ y $\theta = \theta_M$,

$$e^{-\lambda \cdot t} = 1$$

$$c_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t = c_1$$

$$c_2 \cdot \text{sen} \omega_1 \cdot t = 0$$

por lo que,

$$c_2 = 0 \quad (3.66)$$

Derivando la ecuación 3.65 por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = & -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[c_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t + c_2 \cdot \text{sen} \omega_1 \cdot t \right] + \\ & + e^{-\lambda \cdot t} \left[-c_1 \cdot \omega_1 \cdot \text{sen} \omega_1 \cdot t + c_2 \cdot \omega_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t \right] \end{aligned}$$

Siendo la velocidad angular cero,

$$0 = -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[c_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t + c_2 \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot t \right] + e^{-\lambda \cdot t} \left[-c_1 \cdot \omega_1 \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot t + c_2 \cdot \omega_1 \cdot \cos \omega_1 \cdot t \right]$$

Eliminando términos,

$$0 = -\lambda \cdot c_1 + c_2 \cdot \omega_1$$

Dado que $c_1 = \theta_M$,

$$0 = -\lambda \cdot \theta_M + c_2 \cdot \omega_1$$

De donde se obtiene el valor de c_2 ,

$$c_2 = \frac{\lambda \cdot \theta_M}{\omega_1} \quad (3.67)$$

Sustituyendo los valores hallados de c_1 y c_2 en la ecuación 3.65, se obtendrá

$$\begin{aligned} \theta &= e^{-\lambda \cdot t} \left[\theta_M \cdot \cos \omega_1 \cdot t + \frac{\lambda \cdot \theta_M}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot t \right] \\ \theta &= \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot t + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot t \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

que es la ecuación del balance para aguas tranquilas, con resistencia. Analizando el factor,

$$e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{para } t \rightarrow \infty$$

vemos que la amplitud de la oscilación tenderá a cero.

En la ecuación 3.68 se va a sustituir el tiempo t , por dos grupos de valores. Uno de ellos será:

$$t = \frac{\pi}{\omega_1} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad t = \frac{3\pi}{\omega_1} \quad t = \frac{4\pi}{\omega_1} \quad \dots$$

que darán al coseno alternativamente valores (-1) y (+1), mientras que el seno será cero.

El segundo grupo, que tendrá por valores,

$$t = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_1} \quad t = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\omega_1} \quad t = \frac{5}{2} \frac{\pi}{\omega_1} \quad t = \frac{7}{2} \frac{\pi}{\omega_1} \quad \dots$$

dará resultados contrarios al primer grupo en cuanto a las funciones trigonométricas. Ahora el seno irá tomando valores (+1) y (-1) alternativamente, en tanto que el coseno será cero.

Veamos los valores que toma la ecuación 3.68 para cada uno de los valores de t propuestos, trabajando separadamente cada grupo.

Para $t = \frac{\pi}{\omega_1}$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot \frac{\pi}{\omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \pi + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \pi \right]$$

$$\theta = -\theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$t = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos 2\pi + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } 2\pi \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$t = \frac{3\pi}{\omega_1}$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{3\pi}{\omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot \frac{3\pi}{\omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos 3\pi + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } 3\pi \right]$$

$$\theta = -\theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$t = \frac{4\pi}{\omega_1}$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{4\pi}{\omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot \frac{4\pi}{\omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos 4\pi + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } 4\pi \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

.....

$$\text{Para } t = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \frac{1}{2}\pi + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \frac{1}{2}\pi \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{\lambda}{\omega_1}$$

$$t = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{3}{2} \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \omega_1 \cdot \frac{3}{2} \frac{\pi}{\omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \frac{3}{2}\pi + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \text{sen } \frac{3}{2}\pi \right]$$

$$\theta = -\theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{\lambda}{\omega_1}$$

$$t = \frac{5 \pi}{2 \omega_1}$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{5 \pi}{2 \omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \operatorname{sen} \omega_1 \cdot \frac{5 \pi}{2 \omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \frac{5 \pi}{2} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \operatorname{sen} \frac{5 \pi}{2} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{\lambda}{\omega_1}$$

$$t = \frac{7 \pi}{2 \omega_1}$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega_1 \cdot \frac{7 \pi}{2 \omega_1} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \operatorname{sen} \omega_1 \cdot \frac{7 \pi}{2 \omega_1} \right]$$

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \frac{7 \pi}{2} + \frac{\lambda}{\omega_1} \cdot \operatorname{sen} \frac{7 \pi}{2} \right]$$

$$\theta = -\theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{\lambda}{\omega_1}$$

.....

Luego, para intervalos de tiempo

$$\frac{2\pi}{\omega_1}$$

se repiten los valores de la ecuación 3.68, con lo cual, éste intervalo será el período doble de balance para el buque en aguas tranquilas y con resistencia. También se deduce por los diferentes valores que se obtienen para t , que el movimiento será oscilatorio.

Por lo tanto, el período doble de balance del buque en aguas tranquilas y con amortiguamiento, tomará el valor siguiente,

$$T_d' = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

$$T_d' = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}}}$$

$$T_d' = \frac{T_d}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \quad (3.69)$$

siendo T_d el período doble de balance del buque en aguas quietas y sin considerar la resistencia de amortiguamiento.

Situando el problema en el movimiento de balance de los buques, el valor de la raíz cuadrada de la ecuación 3.69 suele ser ligeramente inferior a uno, por lo que el período doble con resistencia es algo mayor que el período doble sin resistencia, lo cual es lógico. Esta relación es del orden de

$$T_d' = 1,001 \cdot T_d$$

Por tanto, a efectos prácticos, dados estos valores sensiblemente próximos, se puede tomar

$$T_d' \approx T_d \quad (3.70)$$

3.12 Balance entre olas, con resistencia

En la ecuación del balance con resistencia recibiendo el buque las olas de través intervendrán el momento de inercia, el momento resistente del agua y el par de adrizamiento del buque. Tal como se ha hecho antes en la ecuación 3.53, movimiento del buque en aguas tranquilas y con resistencia, el efecto del amortiguamiento del balance debido a la resistencia opuesta por el agua se considera que varía con la velocidad angular.

En el par adrizante se introducirá el ángulo de la pendiente de la ola, θ_0 , de manera que dentro de la estabilidad inicial,

$$M_a = D \cdot GM \cdot (\theta - \theta_0)$$

siendo $(\theta - \theta_0)$ el ángulo de balance relativo entre la normal a la pendiente y la línea central del buque, tal como se expuso en el movimiento de balance en aguas quietas sin resistencia, (Ecs. 3.22 y 3.23).

Consecuentemente, la ecuación del movimiento de balance con resistencia entre olas, tomará la forma,

$$I_g \frac{d^2\theta}{dt^2} + A_R \frac{d(\theta - \theta_0)}{dt} + D \cdot GM \cdot (\theta - \theta_0) = 0 \quad (3.71)$$

siendo A_R un coeficiente de amortiguamiento.

Entendiendo que dentro del oleaje regular lo normal es que el ángulo de la pendiente de la ola sea pequeño en comparación con el ángulo de balance absoluto, entre la perpendicular a la superficie de la mar en calma y la línea central del buque, se puede simplificar la ecuación anterior, quedando de la manera siguiente,

$$\frac{d(\theta - \theta_0)}{dt} \approx \frac{d\theta}{dt}$$

$$I_g \frac{d^2\theta}{dt^2} + A_R \frac{d\theta}{dt} + D \cdot GM \cdot (\theta - \theta_0) = 0 \quad (3.72)$$

Esta ecuación se somete al mismo proceso de transformación que el efectuado anteriormente en la citada ecuación 3.53,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{A_R}{I_g} \frac{d\theta}{dt} + \frac{D \cdot GM}{I_g} \cdot (\theta - \theta_0) = 0$$

$$I_g = \frac{D}{g} \cdot k^2$$

$$2\lambda = \frac{A_R}{I_g} = \frac{A_R \cdot g}{D \cdot k^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g \cdot GM}{k^2} \cdot (\theta - \theta_0) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g \cdot GM}{k^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \cdot (\theta - \theta_0) = 0$$

Y finalmente,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \cdot \theta - \omega^2 \cdot \theta_0 = 0 \quad (3.73)$$

Ecuación cuyos tres primeros términos coinciden con la ecuación general del movimiento de balance de buque con resistencia en aguas tranquilas, (Ec. 3.57), siendo el cuarto término, (el término negativo),

$$- \omega^2 \cdot \theta$$

la fuerza perturbadora de la ola. Al tratar el movimiento de balance del buque entre olas sin resistencia se obtuvo esta misma fuerza perturbadora de la pendiente de la ola, (Ec. 3.32), siendo el término resultante,

$$- \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t$$

Haciendo esta sustitución en la ecuación 3.73,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \cdot \theta - \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t = 0 \quad (3.74)$$

Se toma como solución particular de la ecuación 3.74 anterior,

$$\theta = E_K \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t + F_K \cdot \cos \omega_W \cdot t \quad (3.75)$$

Derivando dos veces esta solución particular,

$$\frac{d\theta}{dt} = E_K \cdot \omega_W \cdot \cos \omega_W \cdot t - F_K \cdot \omega_W \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - E_K \cdot \omega_W^2 \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t - F_K \cdot \omega_W^2 \cdot \cos \omega_W \cdot t$$

Sustituyendo la solución particular y sus derivadas en la ecuación 3.74,

$$\begin{aligned}
& \left(- E_K \cdot \omega_W^2 \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t - F_K \cdot \omega_W^2 \cdot \cos \omega_W \cdot t \right) + \\
& + 2\lambda \left(E_K \cdot \omega_W \cdot \cos \omega_W \cdot t - F_K \cdot \omega_W \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t \right) + \\
& + \omega^2 \left(E_K \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t + F_K \cdot \cos \omega_W \cdot t \right) - \omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \text{sen } \omega_W \cdot t = 0
\end{aligned}$$

Sacando factor común

$$\begin{aligned}
& \text{sen } \omega_W \cdot t \quad \text{y} \quad \cos \omega_W \cdot t \\
& \text{sen } \omega_W \cdot t \left[- E_K \cdot \omega_W^2 - 2\lambda \cdot F_K \cdot \omega_W + E_K \cdot \omega^2 - \omega^2 \cdot \theta_{M0} \right] + \\
& + \cos \omega_W \cdot t \left[- F_K \cdot \omega_W^2 + 2\lambda \cdot E_K \cdot \omega_W + F_K \cdot \omega^2 \right] = 0 \quad (3.76)
\end{aligned}$$

La ecuación 3.76 anterior debe cumplirse para cualquier valor de t. Esto requiere que,

$$\left[- E_K \cdot \omega_W^2 - 2\lambda \cdot F_K \cdot \omega_W + E_K \cdot \omega^2 - \omega^2 \cdot \theta_{M0} \right] = 0 \quad (3.77)$$

$$\left[- F_K \cdot \omega_W^2 + 2\lambda \cdot E_K \cdot \omega_W + F_K \cdot \omega^2 \right] = 0 \quad (3.78)$$

Despejando F_K en la ecuación 3.78,

$$\begin{aligned}
2\lambda \cdot E_K \cdot \omega_W &= F_K \left(\omega_W^2 - \omega^2 \right) \\
F_K &= \frac{2\lambda \cdot E_K \cdot \omega_W}{\omega_W^2 - \omega^2} \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Para hallar E_K procederemos de la forma siguiente. Se despeja $\omega^2 \cdot \theta_{M0}$ en la ecuación 3.77 y se introduce el valor de F_K hallado,

$$\begin{aligned}
- E_K \cdot \omega_W^2 - 2\lambda \cdot F_K \cdot \omega_W + E_K \cdot \omega^2 &= \omega^2 \cdot \theta_{M0} \\
- E_K \cdot \omega_W^2 - 2\lambda \cdot \frac{2\lambda \cdot E_K \cdot \omega_W}{\omega_W^2 - \omega^2} \cdot \omega_W + E_K \cdot \omega^2 &= \omega^2 \cdot \theta_{M0}
\end{aligned}$$

$$- E_K \cdot \omega_W^2 - \frac{4\lambda^2 \cdot E_K \cdot \omega_W^2}{\omega_W^2 - \omega^2} + E_K \cdot \omega^2 = \omega^2 \cdot \theta_{M0}$$

Sacando factor común E_K ,

$$E_K \left[\omega^2 - \omega_W^2 + \frac{4\lambda^2 \cdot \omega_W^2}{\omega^2 - \omega_W^2} \right] = \omega^2 \cdot \theta_{M0}$$

$$E_K \left[\frac{(\omega^2 - \omega_W^2)^2 + 4\lambda^2 \cdot \omega_W^2}{\omega^2 - \omega_W^2} \right] = \omega^2 \cdot \theta_{M0} \quad (3.80)$$

Haciendo,

$$\tan \beta = - \frac{F_K}{E_K} \quad (3.81)$$

y teniendo en cuenta la ecuación 3.79,

$$\tan \beta = - \frac{2\lambda \cdot E_K \cdot \omega_W}{E_K (\omega_W^2 - \omega^2)}$$

$$\tan \beta = \frac{2\lambda \cdot \omega_W}{\omega^2 - \omega_W^2} \quad (3.82)$$

Desarrollando la relación trigonométrica,

$$1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$1 + \frac{4\lambda^2 \cdot \omega_W^2}{(\omega^2 - \omega_W^2)^2} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\frac{(\omega^2 - \omega_W^2)^2 + 4\lambda^2 \cdot \omega_W^2}{\omega^2 - \omega_W^2} = \frac{\omega^2 - \omega_W^2}{\cos^2 \beta} \quad (3.83)$$

El primer miembro de esta última ecuación es igual al paréntesis del primer miembro de la ecuación 3.80. Por lo tanto,

$$E_K \frac{\omega^2 - \omega_w^2}{\cos^2 \beta} = \omega^2 \cdot \theta_{M0}$$

Despejando se obtendrá el valor de E_K ,

$$E_K = \frac{\omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \cos^2 \beta}{\omega^2 - \omega_w^2} \quad (3.84)$$

Dividiendo por E_K la ecuación 3.75, que es la solución particular de la ecuación diferencial del movimiento de balance entre olas, en la que se considera la resistencia ofrecida por el agua, (Ec. 3.74),

$$\frac{\theta}{E_K} = \text{sen } \omega_w \cdot t + \frac{F_K}{E_K} \cdot \cos \omega_w \cdot t$$

De acuerdo con la ecuación 3.81,

$$\frac{\theta}{E_K} = \text{sen } \omega_w \cdot t - \tan \beta \cdot \cos \omega_w \cdot t$$

$$\frac{\theta}{E_K} = \text{sen } \omega_w \cdot t - \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} \cdot \cos \omega_w \cdot t$$

$$\frac{\theta}{E_K} = \frac{\text{sen } \omega_w \cdot t \cdot \cos \beta - \text{sen } \beta \cdot \cos \omega_w \cdot t}{\cos \beta}$$

$$\frac{\theta}{E_K} = \frac{\text{sen } (\omega_w \cdot t - \beta)}{\cos \beta}$$

El ángulo de escora absoluta, será igual a,

$$\theta = E_K \frac{\text{sen } (\omega_w \cdot t - \beta)}{\cos \beta}$$

Sustituyendo E_K por su valor de la ecuación 3.84,

$$\theta = \frac{\omega^2 \cdot \theta_{M0} \cdot \cos^2 \beta}{\omega^2 - \omega_W^2} \cdot \frac{\text{sen}(\omega_W \cdot t - \beta)}{\cos \beta}$$

$$\theta = \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen}(\omega_W \cdot t - \beta)}{1 - \frac{\omega_W^2}{\omega^2}}$$

Al ser,

$$\frac{\omega_W^2}{\omega^2} = \frac{(2\pi)^2 / T_W^2}{(2\pi)^2 / T_d^2} = \frac{T_d^2}{T_W^2}$$

$$\theta = \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen}(\omega_W \cdot t - \beta)}{1 - \frac{T_d^2}{T_\omega^2}} \quad (3.85)$$

Parecida al último término de la ecuación 3.40, balance forzado entre olas sin resistencia, con la inclusión, ahora, de β que depende del factor de amortiguación λ . De este modo, el ángulo de la ecuación 3.85 será el ángulo del balance forzado por la perturbación de la ola,

$$\theta_f = \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen}(\omega_W \cdot t - \beta)}{1 - \frac{T_d^2}{T_\omega^2}} \quad (3.86)$$

De acuerdo con esto y con la ecuación del balance para aguas tranquilas con resistencia, (Ec. 3.68), la ecuación del balance entre olas y con resistencia será,

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega \cdot t + \frac{\lambda}{\omega} \cdot \text{sen} \omega \cdot t \right] +$$

$$+ \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen}(\omega_W \cdot t - \beta)}{1 - \frac{T_d^2}{T_\omega^2}} \quad (3.87)$$

El primer término representa el balance amortiguado, en el cual se ha substituido ω_1 , del período de

balance con resistencia, por ω , período de balance sin resistencia, dada su práctica igualdad, como se ha explicado en el apartado anterior.

Analizando la variación con el tiempo, t , del balance amortiguado, se llega a la conclusión de que terminaría desapareciendo al decrecer geométricamente, ya que,

$$e^{-\lambda \cdot t}$$

En teoría el buque terminaría oscilando según el período de las olas en lugar de su período natural, esto es, según el segundo término que corresponde al balance forzado, entrando en sincronismo. Debido a la falta de regularidad en las olas y a la tendencia del buque a oscilar de acuerdo con su período natural, lo normal es que no se establezca sincronismo.

El máximo valor del ángulo de balance forzado se obtendrá cuando,

$$\text{sen} (\omega_w \cdot t - \beta) = \pm 1 \quad (3.88)$$

siendo, entonces, igual a

$$\theta_f = \pm \frac{\theta_{MO} \cdot \cos \beta}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \quad (3.89)$$

Esto ocurrirá para los siguientes valores de t :

$$\text{sen} (\omega_w \cdot t - \beta) = + 1$$

$$t = \frac{T_w}{4} + \frac{T_w}{2\pi} \beta \quad t = \frac{5}{4} T_w + \frac{T_w}{2\pi} \beta \quad \dots$$

$$\text{sen} (\omega_w \cdot t - \beta) = - 1$$

$$t = \frac{3}{4} T_w + \frac{T_w}{2\pi} \beta \quad t = \frac{7}{4} T_w + \frac{T_w}{2\pi} \beta \quad \dots$$

Lo que se puede verificar haciendo las sustituciones correspondientes.

En la ecuación 3.89, el $\cos \beta$ reducirá el valor del ángulo de balance, siendo consecuente con el efecto de la resistencia del agua.

3.13 Movimiento de balance entre olas, con resistencia

La ecuación que se dedujo del movimiento de balance entre olas regulares considerando la resistencia, es, (Ec. 3.87),

$$\theta = \theta_M \cdot e^{-\lambda \cdot t} \left[\cos \omega \cdot t + \frac{\lambda}{\omega} \cdot \text{sen } \omega \cdot t \right] + \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen } (\omega_W \cdot t - \beta)}{1 - \frac{T_d^2}{T_W^2}}$$

siendo, (Ec. 3.82),

$$\tan \beta = \frac{2\lambda \cdot \omega_W}{\omega^2 - \omega_W^2}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}$$

Si en las ecuaciones anteriores del balance y de la tangente de β , se hace el factor de amortiguamiento igual a un factor sub-1 por unidad de tiempo,

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{T_d}$$

y se sustituyen las frecuencias del balance y de la ola por sus períodos, quedarán:

$$\theta = \theta_M \cdot e^{\frac{-\lambda_1 \cdot t}{T_d}} \left[\cos \frac{2\pi}{T_d} \cdot t + \frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{T_d} \cdot t \right] + \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen } \left(\frac{2\pi}{T_W} \cdot t - \beta \right)}{1 - \frac{T_d^2}{T_W^2}} \quad (3.90)$$

Y, por su parte,

$$\tan \beta = \frac{2\lambda_1}{T_d} \cdot \frac{\omega_w}{\omega^2 - \omega_w^2} \quad (3.91)$$

Dividiendo numerador y denominador del segundo miembro por ω^2 ,

$$\tan \beta = \frac{2\lambda_1}{T_d} \cdot \frac{\frac{\omega_w}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_w^2}{\omega^2}}$$

que, puesto en función de los períodos correspondientes, quedará

$$\tan \beta = \frac{2\lambda_1}{T_d} \cdot \frac{\frac{2\pi}{T_w} \cdot \frac{T_d^2}{4\pi^2}}{1 - \left[\frac{4\pi^2}{T_w^2} \cdot \frac{T_d^2}{4\pi^2} \right]}$$

$$\tan \beta = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\frac{T_d}{T_w}}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \quad (3.92)$$

En este apartado se van a considerar dos casos de balance con olas de través, según sea el período doble de balance muy pequeño o grande.

Primer caso. Período doble de balance muy pequeño

Cuando el buque tiene un período doble de balance muy pequeño, de manera que

$$\frac{T_d}{T_w} \rightarrow 0$$

será, también, de acuerdo con la ecuación 3.92,

$$\tan \beta \rightarrow 0$$

$$\beta \rightarrow 0$$

$$\cos \beta \rightarrow 1$$

El factor

$$e^{-\frac{\lambda_1 \cdot t}{T_d}}$$

de la oscilación libre, (Ec. 3.90), hará que ésta desaparezca rápidamente debido al amortiguamiento, o bien que la oscilación sea lo suficientemente pequeña para que pueda ser despreciada frente al valor de la oscilación forzada.

El término de la oscilación forzada, (Ec. 3.90), quedará reducido a,

$$\theta_f \rightarrow \theta_{M0} \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t \right) \quad (3.93)$$

En la tabla 3.3 se dan para una serie de valores elegidos de t , la posición del buque en el perfil de la ola y el valor de la oscilación forzada, cuyo rango estará entre 0 y el ángulo máximo de la pendiente de la ola, θ_{M0} , como consecuencia de aplicar la ecuación anterior.

Tabla 3.3 Balance del buque para T_d muy pequeño

Tiempo t	Posición del buque en el perfil de la ola	$\text{sen} \left[\frac{2\pi}{T_w} \cdot t \right]$	Escora θ_t
0	seno	$\text{sen } 0 = 0$	0
$\frac{1}{4} T_w$	mitad pendiente	$\text{sen } (\frac{1}{2} \pi) = +1$	$+ \theta_{M0}$
$\frac{1}{2} T_w$	cresta	$\text{sen } \pi = 0$	0
$\frac{3}{4} T_w$	mitad pendiente	$\text{sen } (\frac{3}{2} \pi) = -1$	$- \theta_{M0}$
T_w	seno	$\text{sen } (2\pi) = 0$	0

Analizando la tabla 3.3 se deduce que los palos del buque siguen de cerca la normal al perfil de la ola, lo cual es coherente con la reacción de un par adrizante grande, como es el caso en estudio, ya que a un período doble de balance pequeño le corresponde una altura metacéntrica grande. El balance absoluto es nulo en el seno y en la cresta de la ola, teniendo su valor máximo, θ_{M0} , a la mitad de la pendiente. En conclusión el buque oscila de acuerdo con la pendiente de la ola, siendo el balance

relativo prácticamente nulo y manteniendo la cubierta paralela al perfil de la misma.

Segundo caso. Período doble de balance grande

En este caso se entiende que,

$$\frac{T_w}{T_d} \rightarrow 0$$

tendiendo β , también, a cero. De la ecuación 3.91

$$\tan \beta = \frac{2\lambda_1}{T_d} \cdot \frac{\omega_w}{\omega^2 - \omega_w^2}$$

al ser,

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T_d} \right)^2 \rightarrow 0$$

la tangente de β tomará el valor siguiente,

$$\tan \beta = \frac{2\lambda_1}{T_d} \cdot \frac{1}{(-\omega_w)}$$

$$\tan \beta = - \frac{2\lambda_1}{T_d} \cdot \frac{T_w}{2\pi}$$

$$\tan \beta = - \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{T_w}{T_d}$$

$$\tan \beta \rightarrow 0$$

$$\beta \rightarrow 0$$

$$\cos \beta \rightarrow 1$$

Se considera aisladamente, como en el caso anterior, el efecto de la oscilación forzada. De la ecuación

3.90 y dado que $\beta = 0$, se obtiene para la oscilación forzada,

$$\theta_f = \frac{\theta_{M0} \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t \right)}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}} \quad (3.94)$$

El denominador tendrá un valor grande, por lo tanto la oscilación forzada será pequeña. De acuerdo con las deducciones hechas en el primer caso a partir de la tabla 3.3, se ve que en el seno y en la cresta el balance forzado será cero, también, en el presente caso, y que el valor máximo del mismo se alcanzará a la mitad de la pendiente, aunque su valor, tal como se ha dicho, será pequeño.

Al ser grande el período doble de balance, la altura metacéntrica será pequeña. En consecuencia el comportamiento que cabe esperar del buque durante el balance, es que al ser el par adrizante pequeño, los palos seguirán con lentitud a la normal de la trocoide. El ángulo máximo del balance absoluto será pequeño comparado con el balance relativo del buque con respecto a la normal. Esto puede hacer que el buque embarque agua más fácilmente.

3.14 Efecto del amortiguamiento sobre el sincronismo

De acuerdo con la ecuación 3.70, el período doble de balance del buque es prácticamente el mismo con y sin amortiguamiento. Esta aproximación se ha utilizado ya en el apartado 3.12 al obtener las ecuaciones del balance del buque entre olas con resistencia y al deducir la influencia del amortiguamiento en el ángulo de balance. Seguiremos, por lo tanto, haciendo uso de esta aproximación.

Se va a estudiar, ahora, el efecto que el amortiguamiento tiene sobre el sincronismo, el cual, como ya se ha comentado, se produce cuando el período doble de balance del buque es igual al período de la ola. De la ecuación 3.90 se extrae el término del balance forzado entre olas y con resistencia. Luego se introduce la tangente de β y se transforma adecuadamente para su análisis.

$$\theta_f = \frac{\theta_{M0} \cdot \cos \beta \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t - \beta \right)}{1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}$$

quedando,

$$\theta_f = \frac{\theta_{M0} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t - \beta \right)}{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right) \sqrt{1 + \tan^2 \beta}}$$

siendo $\tan^2 \beta$, (Ec. 3.92),

$$\tan^2 \beta = \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{\frac{T_d^2}{T_w^2}}{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right)^2}$$

Sustituyendo,

$$\theta_f = \frac{\theta_{M0} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t - \beta \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{\frac{T_d^2}{T_w^2}}{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right)^2}}$$

Y realizando las simplificaciones oportunas, se obtendrá la ecuación del balance forzado en función de los períodos natural y de la ola,

$$\theta_f = \frac{\theta_{M0} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t - \beta \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right)^2 + \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{T_d^2}{T_w^2}}} \quad (3.95)$$

Introduciendo la ecuación 3.95, de la oscilación forzada, en la ecuación 3.90 del balance entre olas, con resistencia,

$$\theta = \theta_M \cdot e^{\frac{-\lambda_1 \cdot t}{T_d}} \left[\cos \frac{2\pi}{T_d} \cdot t + \frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_d} \cdot t \right] +$$

$$+ \frac{\theta_{M0} \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t - \beta \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2} \right)^2 + \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{T_d^2}{T_w^2}}} \quad (3.96)$$

Sobre esta ecuación se va a analizar el papel que juega el amortiguamiento en el sincronismo transversal.

Al producirse sincronismo se verifica que,

$$T_d = T_w \quad y \quad \omega = \omega_w$$

En consecuencia el valor de β será,

$$\tan \beta = \infty$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

Para que el numerador de la ecuación 3.95, oscilación forzada, tome el valor máximo $\pm \theta_{M0}$, deberá ser,

$$\text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot t - \beta \right) = \pm 1 \quad (3.97)$$

lo que se cumplirá para,

$$t = \frac{T_w}{2} \quad t = T_w \quad t = \frac{3}{2} T_w \quad \dots$$

como se comprueba a continuación.

$$t = T_w/2$$

$$\text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot \frac{T_w}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = + 1$$

$$t = T_w$$

$$\text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot T_w - \frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$t = 3/2 T_w$$

$$\text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_w} \cdot \frac{3T_w}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = +1$$

Esto indica que los máximos valores de balance se alcanzarán en la cresta y en el seno de la ola, (ver tabla 3). Es decir, que para los valores de T_d considerados en el apartado anterior, muy pequeño y grande, el ángulo máximo de balance se alcanzaba a la mitad de la pendiente, y durante el proceso de aproximación al sincronismo, estos ángulos máximos se van desplazando hacia la cresta y el seno, (Fig. 3.14).

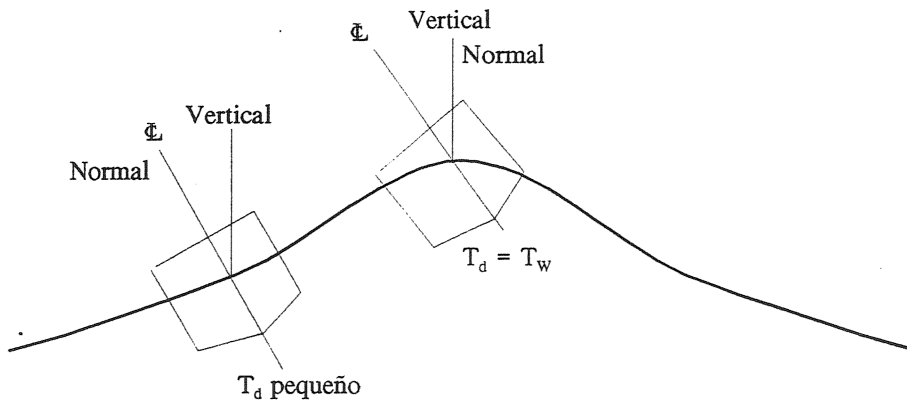


Fig. 3.14a Ángulo máximo de balance para T_d muy pequeño y para $T_d = T_w$

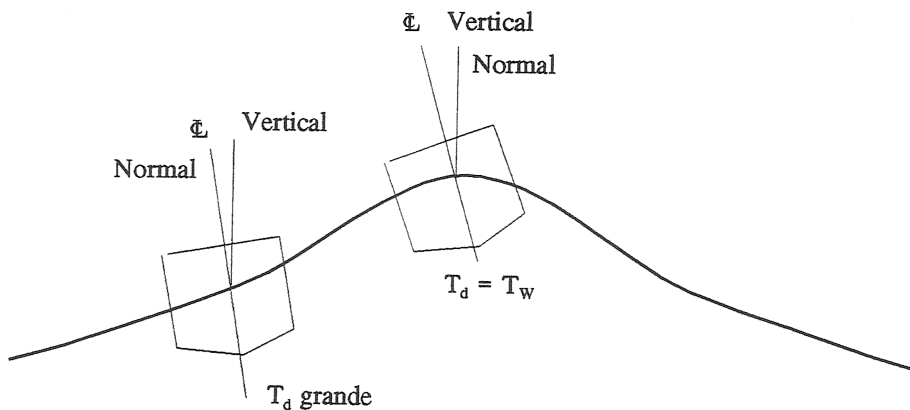


Fig. 3.14b Ángulo máximo de balance para T_d grande y para $T_d = T_w$

La relación entre el ángulo de balance forzado y el ángulo máximo de la pendiente, de acuerdo con las ecuaciones 3.95 y 3.97, será

$$\frac{\theta}{\theta_{M0}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{T_d^2}{T_w^2}\right)^2 + \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{T_d^2}{T_w^2}}} \quad (3.98)$$

θ_{M0} no suele sobrepasar los diez grados, y el ángulo máximo del balance forzado crecerá hasta un valor finito que será el alcanzado cuando se produzca el equilibrio entre la energía del amortiguamiento durante un balance simple (babor-estribor), y la energía suministrada por la ola en su paso seno-cresta, es decir, la mitad de su longitud.

3.15 Determinación de la estabilidad inicial del buque con el período doble de balance

La relación establecida entre el período doble de balance o período natural del buque y la altura metacéntrica transversal inicial, (Ecs. 3.5, 3.9 y 3.41), es

$$I_g = \frac{D}{g} \cdot k^2$$

$$T_d = \frac{2\pi \cdot k}{\sqrt{g \cdot GM}}$$

$$T_d = 2\pi \sqrt{\frac{I_g}{D \cdot GM}}$$

siendo:

I_g	momento de inercia de la masa del buque alrededor de un eje de oscilación longitudinal que pase por su centro de gravedad
k	radio de giro de la masa del buque con respecto al eje de oscilación
g	aceleración de la gravedad
D	desplazamiento
T_d	período doble de balance del buque
GM	altura metacéntrica transversal inicial, corregida de superficies libres

Esta relación sugirió la idea de comprobar, aunque sólo fuera de forma aproximada, el valor de la altura metacéntrica midiendo el período del buque, dadas las dificultades para conocer los otros parámetros que intervienen en las mismas, como son el radio de giro o la inercia de la masa. Se tomó como fórmula práctica de esta relación,

$$GM = \left(\frac{f \cdot M}{T_d} \right)^2 \quad (3.99)$$

en la que:

- f factor que depende de las formas del buque, condición de carga y distribución de las masas
M manga del buque, en la misma unidad que la al altura metacéntrica, GM, usualmente en metros
T_d período doble de balance del buque, expresado en segundos

La aplicación hace imprescindible conocer los valores del factor f para distintas condiciones de carga, por ejemplo, lastre, media carga y plena carga. Este valor estará de acuerdo con las unidades utilizadas para la manga, ya que en cuanto al período, la unidad es el segundo. A tal fin se realizan las experiencias de balance o de inercia que, sin entrar en detalle, consisten en someter al buque a un movimiento de balance y dejarlo oscilar libremente, midiendo el tiempo de su período doble natural. Despejando en la ecuación 3.99, se hallará f para la condición de carga del buque en el momento de la experiencia. Repitiendo la operación para distintos estados de carga se obtendrá una tabla de valores de f, que durante la vida útil del buque permitirá verificar su estabilidad transversal inicial de una manera sencilla.

La gama de valores de f, para metros, suele estar entre 0,70 y 0,90, tomándose como valor estándar el de 0,78, cuando se desconoce. Sin embargo, estos datos estadísticos se deben tratar con toda la reserva y prudencia para evitar falsas expectativas en la utilización del método.

La práctica habitual para hacer esta verificación del GM a través de la medición del T_d y la ecuación 3.99, consiste en poner el buque atravesado a la mar, lo que provocará el movimiento de balance debido a las olas, debiendo ser las escoras pequeñas o en cualquier caso dentro de la estabilidad inicial. Esta operación suele realizarse a la salida de puerto.

Al hacer la medición del período natural, podrá suceder que el tiempo en segundos sea superior, igual o inferior al esperado, lo que significará que el GM, según esta aproximación, será superior, igual o inferior al calculado.

Como regla general debe tenerse en cuenta que el factor f aumenta cuando el reparto de masas del buque y su carga es tal que las masas están más alejadas del eje de oscilación. Por ello debe esperarse que:

- a) El valor de f para un buque sin carga sea mayor que para un buque cargado.
- b) El factor f para un buque con mucho combustible y agua de lastre será mayor que en el caso contrario, ya que los tanques de ambos líquidos suelen estar en el doble fondo, por tanto, lejos del eje de oscilación.
- c) El valor de f será mayor en buques con grandes espacios vacíos, lastre permanente en el doble fondo o grandes superestructuras y pesos altos que en buques de formas finas con pocas superestructuras o con pesos concentrados en el interior del buque.

e) La experiencia ha demostrado que los resultados del método de medición del período de balance son de menos garantía cuanto más se acercan a valores de GM de 0,2 metros e inferiores.

3.16 Balance del buque navegando entre olas de dirección constante cualquiera

Hasta aquí se ha tratado el balance en el caso particular de que el buque reciba las olas de través. En este apartado se generaliza el estudio para cualquier valor del ángulo α , entre la línea popa-proa y la dirección de las olas.

En el apartado 1.6 y en la figura 1.7, se definieron la velocidad y el período de encuentro, V_e y T_e respectivamente, entre el buque y la ola, siendo sus expresiones,

$$V_e = V_w + V_b \cdot \cos \alpha \quad (3.100)$$

$$T = \frac{L}{V_w} \quad (3.101)$$

$$T_e = \frac{L}{V_e} \quad (3.102)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la velocidad de encuentro por el valor dado en la ecuación 3.100, quedará

$$T_e = \frac{L}{V_w + V_b \cdot \cos \alpha} \quad (3.103)$$

El término $V_b \cdot \cos \alpha$, será positivo cuando α esté en el primer o cuarto cuadrante, (mar por la amura), y negativo cuando α esté en el segundo o tercer cuadrante, (mar por la aleta), considerando la línea proa-popa como eje positivo.

De la ecuación 3.103 se desprende que cuando se reciba la ola por la amura el período de encuentro será menor que el período de la ola, y cuando se reciba por la aleta será mayor.

La pendiente de la ola depende de su longitud y altura. En la figura 3.15 se representa la ola abierta un ángulo α y su longitud entre cresta y cresta. Descomponiendo esta ola en una de proa y otra de través, la longitud de esta última será,

$$L_{través} = L \cdot \sin \alpha$$

Como consecuencia de todo esto, la componente de través de la pendiente de la ola vendrá afectada por el seno de α , y la pendiente máxima de la ola, que es la que interesa en el estudio de la oscilación

forzada, será,

$$\theta_{MO \text{ balance}} = \theta_{MO} \cdot \text{sen } \alpha \quad (3.104)$$

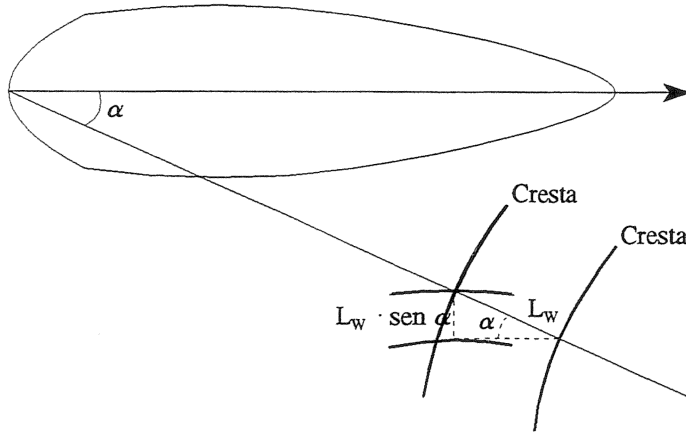


Fig. 3.15 Componente transversal de la longitud de la ola

La ecuación 3.90 del movimiento de balance entre olas con resistencia, puede, por tanto, generalizarse introduciendo el período de encuentro y la pendiente máxima de la componente de través, con lo que quedará de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \theta = & \theta_M \cdot e^{\frac{-\lambda_1 \cdot t}{T_d}} \left[\cos \frac{2\pi}{T_d} \cdot t + \frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_d} \cdot t \right] + \\ & + \frac{\theta_{MO} \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{T_e} \cdot t - \beta \right)}{1 - \frac{T_d^2}{T_e^2}} \end{aligned} \quad (3.105)$$

siendo, (Ec. 3.92),

$$\tan \beta = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\frac{T_d}{T_e}}{1 - \frac{T_d^2}{T_e^2}} \quad (3.106)$$

3.16.1 Sincronismo transversal

Si se considera la condición de sincronismo transversal, es decir, el período de encuentro de la ola es igual al período doble de balance del buque,

$$T_e = T_d$$

la ecuación 3.103, podrá ponerse, también, como ecuación del período de balance,

$$T_d = \frac{L}{V_w + V_b \cdot \cos \alpha}$$

Despejando $\cos \alpha$,

$$\cos \alpha = \frac{L - T_d \cdot V_w}{T_d \cdot V_b} \quad (3.107)$$

Por lo tanto, dados unos valores de longitud y velocidad de la ola, y conociendo la velocidad del buque y su período natural, se puede determinar el ángulo de la ola con la línea popa-proa para el cual el buque podría entrar en sincronismo.

Existen distintas presentaciones de la ecuación 3.107 que permiten conocer bajo que condiciones existirá la posibilidad de sincronismo. Sin embargo dada la simplicidad de la ecuación, puede crearse sin mucha complicación la tabla o el gráfico de un buque en concreto, con la consiguiente ventaja de sencillez de uso y aplicabilidad.

3.16.2 Manera de evitar el sincronismo

En base a los estudios hasta aquí desarrollados y a los análisis de los parámetros con influencia sobre la oscilación del buque, ya se ha comentado que entrar en la condición de sincronismo no es algo que pueda ocurrir fácilmente pero, dada su importancia para el buque, se considera oportuno hacer un resumen de aquellos elementos que intervienen involuntaria o voluntariamente contra el sincronismo de manera que pueda evitarse.

a) Acciones voluntarias contra el sincronismo

- Resistencia de los medios agua y aire.
- Falta de regularidad de las olas, tanto en las características como en la dirección.
- Interrelación entre la oscilación libre y la forzada, lo que dará lugar a una componente de oscilación variable e irregular.
- Distribución variable de la presión sobre el casco debida al oleaje, cuya consecuencia es la actuación de fuerzas que modifican el rumbo y la velocidad del buque.

b) Acciones voluntarias

- Variación del rumbo.
- Variación de la velocidad.

Si bien parece, pues, difícil que se produzca una situación de sincronismo, es necesario el conocimiento de las circunstancias que puedan favorecer e incluso llevar al sincronismo, utilizando para ello, por ejemplo, la ecuación 3.107.

3.17 Movimiento de cabeceo entre olas, sin resistencia

El estudio del movimiento de cabeceo en aguas quietas quedaría limitado al trimado que se produce en el buque al trasladar, cargar o descargar pesos, teniendo como eje de giro el eje transversal que pasa por el centro de flotación. Sin embargo, estas operaciones no producen un movimiento de oscilación, ni tampoco permiten medir el período doble de cabeceo.

Debido al gran momento de estabilidad longitudinal que tienen los buques, resultaría difícil, sino imposible, provocar mediante una fuerza momentánea un movimiento de oscilación libre longitudinal. Esto llevaría a no considerar el estudio del movimiento de cabeceo en aguas tranquilas y a pasar directamente al estudio del cabeceo entre olas regulares, sin resistencia.

Supuesto el buque recibiendo las olas de proa o de popa y dada la relación que usualmente existe entre la eslora del buque y la longitud de la ola, el perfil de ésta no puede sustituirse por una línea recta tal como se hizo en la sección transversal al estudiar el balance, (Fig. 3.16).

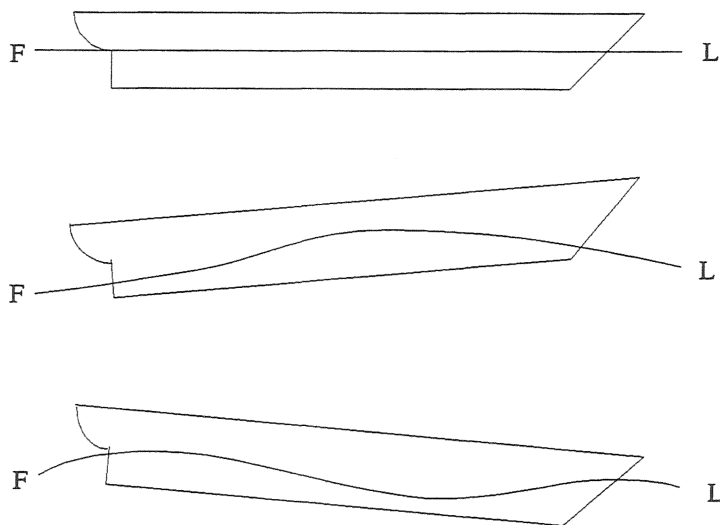


Fig. 3.16 Perfiles de la superficie libre sobre el plano diametral

El centro de carena tendrá un movimiento que no obedecerá a las clásicas cuñas de emersión e inmersión de la estabilidad longitudinal, sino que vendrá condicionado por la forma irregular que tomará el volumen sumergido debido al perfil de la ola y la que tenía cuando estaba en equilibrio en aguas tranquilas. Para el cálculo de la posición del centro de carena se requiere la proyección del perfil de la ola sobre el plano diametral y disponer de la curvas de Bonjean, o alguna información equivalente. El conocer, además, los parámetros de la estabilidad inicial longitudinal convierte el cálculo en un proceso de cierto nivel de dificultad y laboriosidad.

3.17.1 Período doble de cabeceo

El período doble de oscilación longitudinal o de cabeceo y, también, período natural, será el tiempo en segundos que tarde el buque en hacer una oscilación completa, por ejemplo, aporado-apopado-aporado.

A pesar de las diferencias puestas de manifiesto en lo anterior con el planteamiento del movimiento de balance, se puede considerar que el eje de giro del movimiento de oscilación longitudinal es un eje transversal que pasa, aproximadamente, por el centro de gravedad del buque, y que existe una cierta analogía de comportamiento del buque en lo que se refiere a sus períodos de cabeceo y balance. Entonces, la deducción de las ecuaciones del período doble de cabeceo a partir del movimiento de un sólido que gira alrededor de un eje, será,

$$I_{L_g} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

I_{L_g} momento de inercia de la masa del buque alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro de gravedad

ψ ángulo de inclinación longitudinal

$\frac{d^2\psi}{dt^2}$ aceleración angular

$$I_{L_g} = \frac{D}{g} \cdot k_L^2$$

donde k_L es el radio de giro de la masa del buque con respecto al eje transversal.

Igualando esta ecuación del movimiento al momento longitudinal del buque,

$$I_{L_g} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + M_L = 0 \quad (3.108)$$

$$M_L = D \cdot GZ_L$$

El brazo GZ_L deberá calcularse de acuerdo con la forma del volumen sumergido, dependiente del perfil de la ola sobre el casco, lo que significa, tal como ya se ha indicado, un planteamiento totalmente particularizado del cálculo de este valor.

Sustituyendo en la ecuación 3.108 la inercia longitudinal por su valor y el momento longitudinal por su correspondiente fórmula de la estabilidad inicial,

$$\frac{D}{g} \cdot k_L^2 \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + D \cdot GM_L \cdot \psi = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g \cdot GM_L}{k_L^2} \cdot \psi = 0 \quad (3.110)$$

Ecuación que al ser del mismo tipo que la del movimiento vibratorio armónico simple, (Ec. 3.3), será

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot GM_L}{k_L^2}}$$

Y, poniendo la frecuencia, ω , en función del período doble de cabeceo, T_p ,

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T_p = \frac{2\pi \cdot k_L}{\sqrt{g \cdot GM_L}} \quad (3.111)$$

o bien,

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_{L_s}}{D \cdot GM_L}} \quad (3.112)$$

Por los estudios realizados se conoce que el valor de la inercia longitudinal es mayor que la transversal, lo que daría un período de cabeceo mayor que el del balance, pero, la altura metacéntrica longitudinal es muchísimo mayor que la transversal. En definitiva, el período doble de cabeceo suele estar en el rango de 1/3 a 2/3 del correspondiente valor del período doble de balance. Distribuyendo longitudinalmente la carga de forma adecuada, se puede actuar sobre el valor del período de cabeceo. Si se acercan las masas al centro de gravedad del buque, la inercia longitudinal será más pequeña y

como consecuencia de ello, también será más pequeño el período. Alejando las masas del centro de gravedad se obtendrá el efecto contrario.

3.17.2 Velocidad y período de encuentro

Para los casos que se han puesto como condición, olas de proa o de popa, se tendrán los valores máximos y mínimos de las velocidades y períodos de encuentro. Se analizarán cada uno de ellos, además del caso general, olas formando un ángulo cualquiera con la proa, y del caso particular, olas de través

a) Olas formando un ángulo cualquiera con la proa

Las ecuaciones generales de la velocidad y el período de encuentro hallados anteriormente para el balance, (Ecs. 3.100 y 3.103), son

$$V_e = V_w + V_b \cdot \cos \alpha \quad (3.113)$$

$$T_e = \frac{L}{V_w + V_b \cdot \cos \alpha} \quad (3.114)$$

La componente proa-popa de la longitud de la ola, (Fig. 3.17),

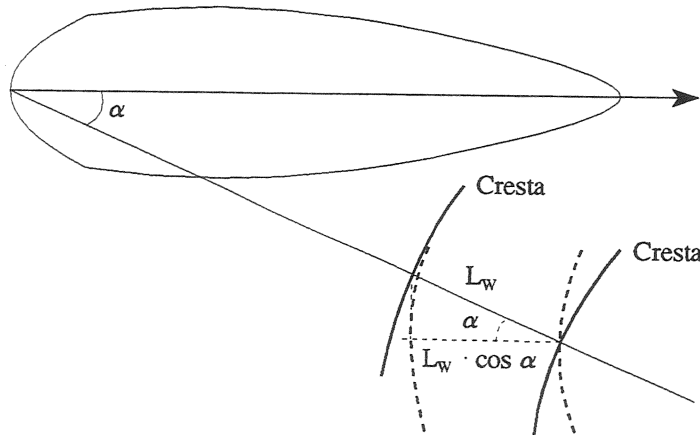


Fig. 3.17 Componente diametral de la longitud de la ola

$$L_{pr-pp} = L \cdot \cos \alpha$$

permite deducir que la pendiente máxima de la ola que afecta al movimiento de cabeceo, tomará el valor

$$\theta_{MO \text{ cabeceo}} = \theta_{MO} \cdot \cos \alpha \quad (3.115)$$

b) Olas de proa

Las ecuaciones de la velocidad y el período de encuentro, (Ecs. 3.113 y 3.114), se reducirán a las siguientes,

$$\cos \alpha = \cos 0^\circ = + 1$$

$$V_e = V_w + V_b \quad (3.116)$$

$$T_e = \frac{L}{V_w + V_b} \quad (3.117)$$

Dando la primera ecuación 3.116 una velocidad de encuentro máxima y la siguiente, (Ec. 3.117), un período de encuentro mínimo.

Por su parte, la longitud de la ola y la pendiente de la misma tendrán, como es de lógica, el mismo valor.

c) Olas de popa

En este caso al ser,

$$\cos \alpha = \cos 180^\circ = - 1$$

la velocidad y el período de encuentro quedarán de la forma siguiente,

$$V_e = V_w - V_b \quad (3.118)$$

$$T_e = \frac{L}{V_w - V_b} \quad (3.119)$$

La velocidad de encuentro tendrá un valor mínimo, que incluso puede llegar a ser negativo, mientras que el período de encuentro llegará a su valor máximo. Un período de encuentro negativo hay que interpretarlo como que el buque va avanzando a las olas.

La longitud de la ola y su pendiente máxima tendrán el mismo valor, como ocurría en el caso anterior

de olas de proa.

d) Olas de través

Al recibir el buque las olas de través,

$$\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

Por lo tanto, la velocidad y el período de encuentro serán los de la ola,

$$V_e = V_w$$

$$T_e = \frac{L}{V_e} = \frac{L}{V_w} = T_w$$

Correspondientemente, la componente proa-popa de la longitud de la ola y la componente de cabeceo de la pendiente máxima de la ola serán nulas.

3.17.3 Cabeceo entre olas, sin resistencia

En este subapartado se estudiarán los casos en que el período de encuentro de la ola sea grande o pequeño comparado con el período de cabeceo, dejándose el caso particular, y muy importante, en que los dos períodos sean iguales, para el subapartado siguiente.

Para simplificar se supondrá que las olas pueden ser de proa o de popa.

a) Período de encuentro de la ola grande comparado con el período de cabeceo, $T_e > T_p$

Un período de encuentro grande se puede obtener, por ejemplo, en el caso de olas de popa, que es cuando aquél llega a su valor máximo.

Dada la gran estabilidad longitudinal que tiene el buque, se considera que sus palos irán buscando la normal a la pendiente de la ola, con tendencia a cabecear según el término de la oscilación forzada, (Ec. 3.44),

$$\psi_f = \frac{\psi_{M0}}{1 - \frac{T_p^2}{T_e^2}} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_e} \cdot t$$

$$1 - \frac{T_p^2}{T_e^2} \rightarrow 1$$

$$\Psi_f = \Psi_{M0} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_e} \cdot t \quad (3.120)$$

Por lo tanto, el ángulo de cabeceo será a lo sumo igual al ángulo máximo de la pendiente; (Fig. 3.18), y la amplitud será igual al doble de la pendiente de la ola. Una curiosidad teórica de este caso, es que, si el buque tuviera la misma velocidad que las olas que recibe de popa, y estuviera situado en la posición de adrizado en la cresta, el buque avanzaría cabalgando sobre la cresta, sin quedar sometido al movimiento de cabeceo.

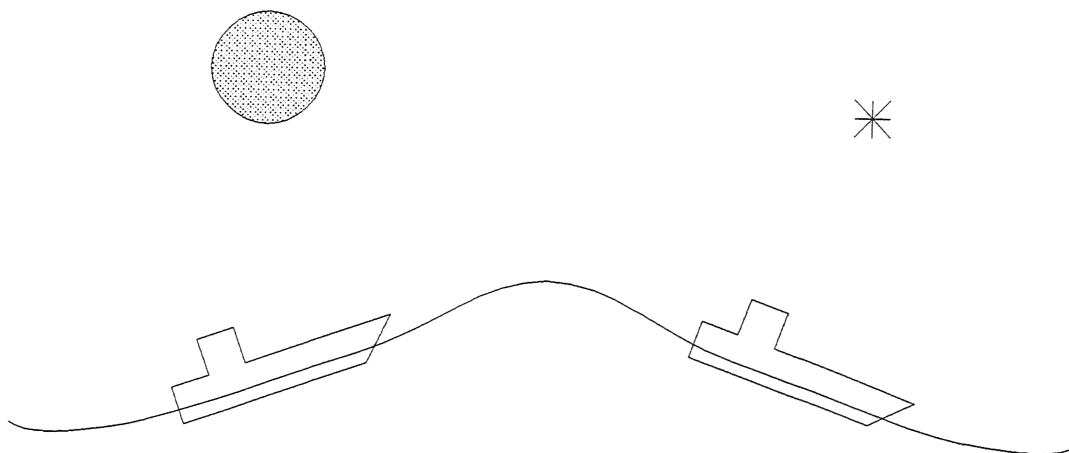


Fig 3.18 Cabeceo con olas de popa, $T_e > T_p$

b) *Período de encuentro de la ola pequeño comparado con el período de cabeceo, $T_e < T_p$*

Este caso se puede presentar con olas cortas de proa y buque a gran velocidad. La tendencia del buque es la de cabecear de acuerdo con su período natural. Tomando prestada la ecuación 3.19 del balance del buque en aguas tranquilas y sin resistencia, ya que la condición de mar corta minimiza la influencia de la oscilación forzada, y aplicándola al cabeceo, tomará la forma,

$$\Psi = \Psi_M \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T_p} \cdot t \quad (3.121)$$

Esta capacidad de utilizar la ecuación de aguas tranquilas será tanto más válida cuanto mayor sea la velocidad del buque, disminuyendo en consecuencia, el ángulo máximo de cabeceo, por las razones comentadas sobre la capacidad de oscilación longitudinal del buque en aguas quietas.

3.17.4 Sincronismo longitudinal

Se produce sincronismo longitudinal cuando el período de encuentro de la ola es igual al período doble de cabeceo del buque, es decir, cuando

$$T_e = T_p = T$$

El buque tomará como ángulo de cabeceo el de la oscilación forzada, que para el caso particular del sincronismo y de acuerdo con la ecuación 3.54 del balance, será,

$$\psi = -\psi_{MO} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot t \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad (3.122)$$

Dando valores a t , se obtendrán los ángulos de cabeceo del buque en función del ángulo máximo de la pendiente, (Fig. 3.19). Los valores de t para los que se calcula el cabeceo y los correspondientes valores de este ángulo, son

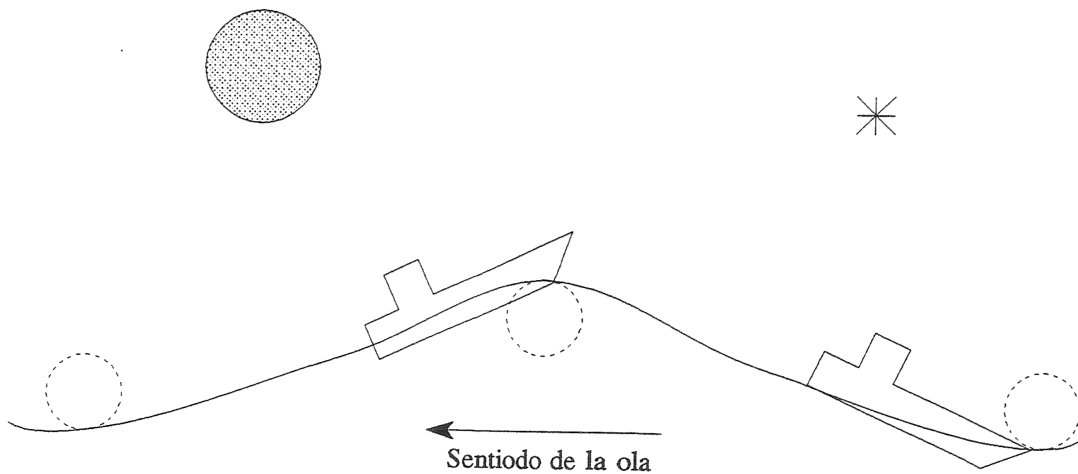


Fig. 3.19 Sincronismo longitudinal

a) $t = \frac{1}{2}T$

$$\psi = \psi_{MO} \cdot \frac{\pi}{2}$$

b) $t = T$

$$\psi = - \psi_{MO} \cdot \pi$$

$$c) \quad t = \frac{3}{2}T$$

$$\psi = \psi_{MO} \cdot \frac{3\pi}{2}$$

$$d) \quad t = 2T$$

$$\psi = - \psi_{MO} \cdot 2\pi$$

$$e) \quad t = \frac{1}{2}T + n \cdot T$$

$$\psi = \psi_{MO} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

o bien,

$$\psi = \frac{1}{2} \psi_{MO} \cdot \pi (1 + 2n)$$

$$f) \quad t = n \cdot T$$

$$\psi = - \psi_{MO} \cdot n \cdot \pi$$

En definitiva, para cada medio período la escora aumenta en

$$\frac{1}{2} \psi_{MO} \cdot \pi$$

3.17.5 Pantocazos

Los pantocazos se presentan con mares de proa, cuando la velocidad del buque y las características de la ola, en particular el período de encuentro y su altura, hacen que la proa salga del agua al paso de la cresta, con posterior caída del buque por gravedad, produciendo un impacto violento del fondo del mismo, en la sección de proa, con la superficie libre de la mar. Colabora a este fenómeno el movimiento de giro de las partículas del agua, que en la cresta es en el mismo sentido que el desplazamiento del perfil de la ola, incrementando la presión hidrodinámica sobre el buque y como consecuencia de ello la amplitud de la cabezada, (Fig. 3.19).

Al producirse sincronismo longitudinal, el cabeceo incrementará su amplitud y los pantocazos su violencia, ya que existirá coincidencia entre la cresta y el valor máximo de salida del agua de la proa, y entre el seno con la máxima inmersión de la proa, encapillando la ola y cayendo el agua sobre la cubierta del castillo y de la zona de proa. En el extremo, el buque pasaría por ojo, clavando su proa en la mar. No obstante, sabemos por lo explicado para el balance, que la posibilidad de entrar en sincronismo es inusual. En cualquier caso se puede evitar esta situación modificando el rumbo y la velocidad del buque, a fin de no sufrir esfuerzos innecesarios del casco, vibraciones y averías de diversa índole, es decir, actuado sobre el término

$$V_b \cdot \cos \alpha$$

de la ecuación 3.114, del período de encuentro. Al abrir el ángulo de proa con la dirección de la ola, la posibilidad de embarcar más o menos cantidad de agua sobre la cubierta, vendrá determinada por el menor o mayor valor absoluto del ángulo de cabezada, respectivamente.

3.18 Movimiento de cabeceo entre olas, con resistencia

A la ecuación de equilibrio del movimiento de cabeceo entre olas, sin considerar la resistencia de los medios, (Ec. 3.108), se le añade un término que expresa el amortiguamiento en función de un coeficiente, A_p , y de la velocidad angular de cabeceo, tal como se hizo para el balance, (Ec. 3.72).

Entonces la ecuación del cabeceo del buque entre olas, con resistencia, será,

$$I_{L_g} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + A_p \cdot \frac{d\psi}{dt} + D \cdot GZ_L = 0 \quad (3.123)$$

Dividiendo por la inercia, I_{L_g} ,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{A_p}{I_{L_g}} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{D}{I_{L_g}} \cdot GZ_L = 0 \quad (3.124)$$

$$I_{L_g} = \frac{D}{g} \cdot k_L^2$$

se tendrá

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{A_p \cdot g}{D \cdot k_L^2} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{g}{k_L^2} \cdot GZ_L = 0 \quad (3.125)$$

Si se compara el cabeceo con el balance, se encuentran grandes diferencias. Un resumen de ellas se expone a continuación, habiendo sido seleccionadas por su importancia y por su presencia en los

estudios del movimiento del buque hasta aquí realizados en los distintos apartados del capítulo.

- La relación entre la longitud de la ola con la eslora y la manga del buque hace que en el cabeceo el perfil de la ola se proyecte en su verdadera forma en el plano diametral, mientras que en el balance, el perfil de la ola en la sección transversal suele sustituirse por una línea recta.
- El movimiento del centro de carena del buque debido al cabeceo tendrá una dependencia del perfil de la ola sobre el casco, con la consiguiente dificultad añadida en su cálculo. Sin embargo, el movimiento del centro de carena en el balance se toma de acuerdo con la teoría de las cuñas.
- El par longitudinal $D \cdot GZ_L$, es muchísimo mayor que el par adrizante $D \cdot GZ$.
- También la inercia longitudinal de la masa del buque es mayor que la inercia transversal de la misma.
- El período doble de cabeceo suele estar entre $1/3$ y $2/3$ del período doble de balance. Es decir, el período doble de balance es de promedio, el doble que el período de cabeceo.
- En el comportamiento del buque, los ángulos de cabeceo son pequeños comparados con los ángulos de balance.
- Así como el efecto de la resistencia de los medios es importante en el caso del balance, en el cabeceo tiene efectos comparativamente pequeños, debido, entre otras cuestiones, a que la inercia longitudinal es grande.
- Los períodos dobles de balance son prácticamente los mismos, con y sin amortiguamiento. Esta misma aproximación se puede aplicar al período doble de cabeceo.

3.19 Movimiento vertical del buque

El movimiento de traslación vertical del buque se va a plantear desde una perspectiva teórica dentro de la línea del balance y el cabeceo, para facilitar la deducción de las ecuaciones de la oscilación y del período, y desde una perspectiva práctica, indicando cuáles son los efectos de las olas regulares sobre el movimiento de oscilación vertical. Importantes son también los acoplamientos del cabeceo y del balance con la oscilación vertical.

3.19.1 Oscilación vertical en aguas tranquilas

Al igual que en el movimiento de cabeceo, en la práctica no se puede someter el buque a un movimiento de oscilación vertical cuando está flotando en aguas tranquilas. Por otra parte, dentro de los estudios de flotabilidad y estabilidad, se muestra cómo un cambio de densidad produce la lógica inmersión o emersión paralela, según el buque pase de flotar de mayor a menor densidad, o al revés, y, además, tendrá lugar una alteración del asiento debido a que el centro de carena se moverá, ya que el volumen sumergido queda modificado por la rebanada entre las flotaciones inicial y final. Esto hace que se pierda la verticalidad entre el centro de gravedad y el centro de carena, y que el buque, para

recuperar el equilibrio, efectúe un giro longitudinal alrededor de un eje transversal que pase por el centro de flotación, es decir, el buque realiza un movimiento de cabeceo.

De todo ello se deduce que un teórico movimiento de oscilación vertical en aguas tranquilas iría acompañado de cabeceo. Se establece, pues, una interrelación entre ambos movimientos.

3.19.2 Ecuación del movimiento vertical no amortiguado en aguas tranquilas

Supongamos que el buque tiene un movimiento vertical que le produce una inmersión paralela, z , (Fig. 3.20). La fuerza de empuje del agua que se opone al movimiento vertical de oscilación libre en aguas tranquilas será,

$$\text{Fuerza de empuje} = - S_F \cdot z \cdot \gamma$$

S_F superficie de flotación
 z inmersión
 γ densidad

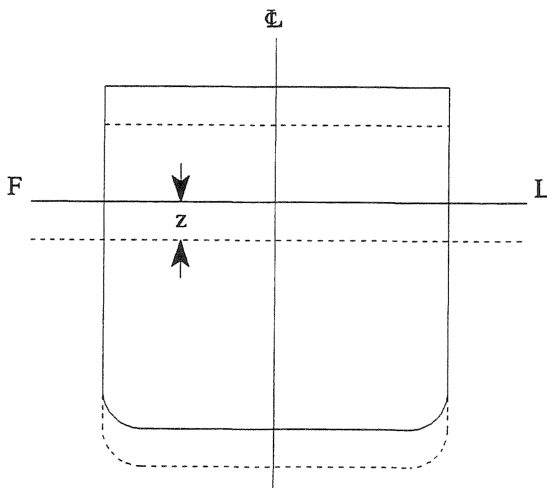


Fig. 3.20 Movimiento de oscilación vertical

Esta fuerza de empuje, a la vez, tendrá por valor la masa del buque por la aceleración vertical, luego la ecuación de equilibrio será,

$$\frac{D}{g} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + S_F \cdot z \cdot \gamma = 0 \quad (3.126)$$

o bien,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g}{D} \cdot S_F \cdot z \cdot \gamma = 0 \quad (3.127)$$

Aquí, tal como se ha venido haciendo a lo largo de este capítulo, no se considera la masa añadida del agua que oscila con el buque.

Para deducir la ecuación del período de una oscilación vertical completa, se recuerdan las ecuaciones 3.1 y 3.3 del movimiento armónico simple, (subapartado 3.3.1),

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Haciendo a partir de la ecuación 3.127, $x = z$, y la frecuencia ω igual a,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{D} \cdot S_F \cdot \gamma}$$

el período vertical, T_H , tomará el valor siguiente,

$$T_H = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{D} \cdot S_F \cdot \gamma}} \quad (3.128)$$

$$T_H = 2\pi \sqrt{\frac{D}{g} \cdot \frac{1}{S_F \cdot \gamma}} \quad (3.129)$$

3.19.3 Ecuación del movimiento vertical con amortiguamiento en aguas tranquilas

Tal como se ha hecho para el balance y el cabeceo, se añadirá un término de amortiguamiento a la ecuación 3.126, proporcional a la velocidad de la oscilación. Entonces, la ecuación del movimiento vertical tomará la forma,

$$\frac{D}{g} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + A_H \cdot \frac{dz}{dt} + S_F \cdot z \cdot \gamma = 0 \quad (3.130)$$

En la que A_H es un coeficiente de amortiguamiento. Dividiendo por D/g , la ecuación resultante será,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + A_H \cdot \frac{g}{D} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{g}{D} \cdot S_F \cdot z \cdot \gamma = 0 \quad (3.131)$$

La fuerza de amortiguamiento es muy grande ya que además de la resistencia de los medios agua y aire, en la práctica del agua, el movimiento de oscilación vertical crea olas en la superficie libre de la mar, por lo tanto, consumirá parte de la energía de la oscilación.

3.19.4 Movimiento vertical entre olas

Al recibir el buque la mar de proa o de popa, tendrá un movimiento de cabeceo y otro vertical. Veamos cómo las formas del buque y el perfil de la ola actúan sobre la oscilación vertical. Para facilitar el planteamiento, se supone que el buque está parado y que la longitud de la ola es igual a la eslora del buque. Esto significará que a cada paso de la ola habrá un momento en que la cresta estará en el centro del buque, y otro en que tendrá una cresta en cada cabeza, a proa y a popa. A continuación se analizan cada uno de estos casos, que son extremos.

a) *Cresta en el centro del buque, (Fig. 3.21)*

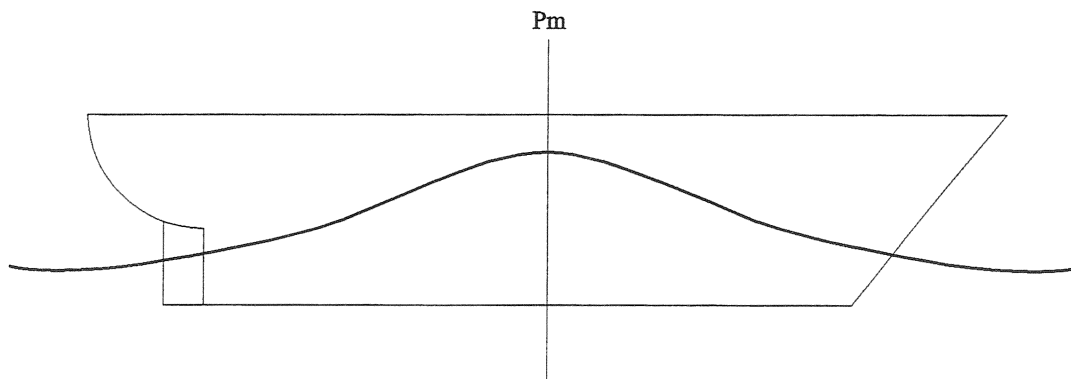


Fig. 3.21 Oscilación vertical. Cresta en el centro del buque

En las cabezas existirán dos senos y en el centro la cresta. Dadas las formas usuales de los buques, afinadas a proa y a popa con respecto al cuerpo central, no habrá equilibrio entre el aumento de empuje en el centro y la disminución del mismo que se produce en las cabezas, quedando el buque sometido a un exceso de empuje. La tendencia del buque será la de compensar el exceso de volumen sumergido con una emersión. Coinciden, por lo tanto, el sentido de la fuerza hidrodinámica de la ola sobre el buque, con el del propio comportamiento de éste.

b) *Seno en el centro del buque, (Fig. 3.22)*

En este caso existirán una cresta en cada cabeza y el seno de la ola en el cuerpo central del buque.

La distribución del empuje indicará una pérdida en el centro mayor que el incremento de las cabezas, lo que llevará al buque a aumentar su volumen sumergido con una inmersión, la cual coincide con el sentido de la oscilación.

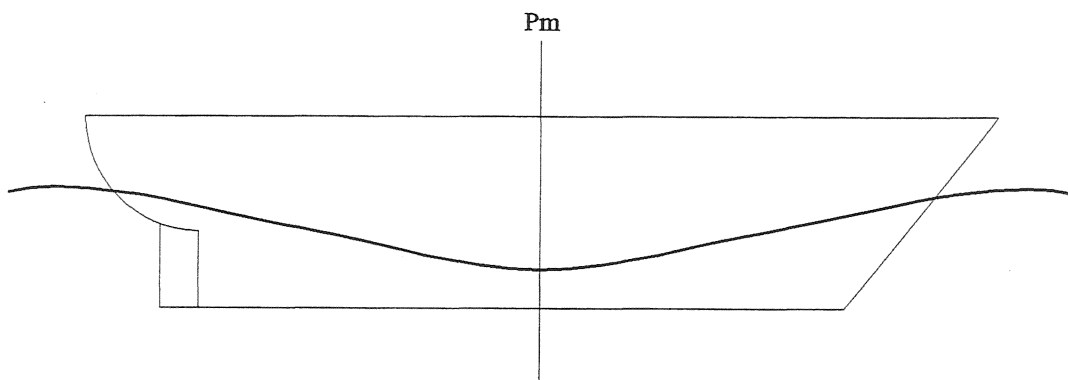


Fig. 3.22 Oscilación vertical. Seno en el centro del buque

Por su parte, también las olas de través producirán en el buque acoplamiento entre el balance y el movimiento de oscilación vertical. Tal y como ya se comentado, debido a la relación entre la longitud de la ola y la manga del buque, el perfil se representa por una línea recta, aplicándose la teoría de las cuñas. En este caso no hay variación en el empuje en cuanto a las cuñas se refiere, ya que éstas tendrán el mismo volumen.

El buque estará alternativamente en la cresta y en el seno de la ola, por lo tanto, siguiendo el ritmo de la oscilación forzada. Esto permite deducir que la amplitud de la oscilación será del orden de la altura de la ola y que el período de la oscilación completa será, también, el período de la ola, es decir, existirá sincronismo. En cualquier caso, la amplitud de la oscilación vertical será mayor cuando esté acoplado al balance que cuando lo esté con el cabeceo.

Generalizando al movimiento del buque entre olas regulares, la magnitud de la oscilación vertical dependerá, entre otros factores, de la relación entre los períodos del buque y de encuentro de la ola. Para una ola determinada y un ángulo de encuentro, la amplitud será máxima cuando exista sincronismo entre estos períodos. El amortiguamiento evitará que la amplitud en situación de sincronismo crezca hasta que pueda ser peligrosa para el buque. En cualquier caso, esta situación puede evitarse cambiando el rumbo y/o la velocidad del buque.

3.20 Acoplamiento entre los movimientos de balance y de cabeceo

Las olas de proa o de popa producirán cabeceo y oscilación vertical. Al ser el buque simétrico con respecto al plano diametral, las fuerzas sobre sus costados serán iguales y de sentido contrario, de manera que se anularán. Por otra parte, el centro de carena se moverá longitudinal y verticalmente sobre el plano de simetría, pero no transversalmente, por lo tanto, al no haber brazo transversal no habrá momento de balance.

Las olas de través producen balance y oscilación vertical. Pero, además, existirá cabeceo, el cual se producirá debido al movimiento longitudinal del centro de carena, en el que colaboran los dos movimientos iniciales, tal como se expone a continuación:

- La oscilación vertical produce cabeceo, tal como se ha explicado en el apartado anterior.
- Al no existir una sección transversal que sea un plano de simetría, el centro de carena, en su movimiento debido al balance, tendrá tanto componentes transversal y vertical como una cierta componente longitudinal, lo que dará lugar a un par de giro que hará cabecear el buque.

Aparte del cabeceo, también se producirá guiñada, debido a la distinta distribución longitudinal de las presiones sobre la superficie mojada, y oscilación transversal, movimientos que no son objeto de estudio de acuerdo con el planteamiento de objetivos realizado al principio del capítulo.

4 Esfuerzos del casco

4.1 Introducción

Los buques se diseñan y construyen según unas necesidades de servicio, estando estructuralmente dimensionados de acuerdo con los materiales utilizados y con el coeficiente de seguridad necesario para poder soportar unos determinados esfuerzos impuestos por los pesos y su distribución, y por las características de las olas entre las que vaya a navegar. Sin embargo, aún en el caso de navegar en aguas tranquilas, el buque está sometido a las sollicitaciones de los pesos, (del propio casco y de la carga), y del empuje del agua.

El trabajo del capitán consiste en determinar un plan de carga que, además de cumplir con los criterios de estabilidad aplicables, sea aceptable desde el punto de vista de la resistencia del casco, de acuerdo con las instrucciones de cálculo de los esfuerzos para el buque de su mando.

Los esfuerzos generales más importantes que se producen sobre el casco del buque son:

- esfuerzos longitudinales verticales
- esfuerzos longitudinales horizontales
- esfuerzos de torsión

En el primer caso se consideran las fuerzas que actúan verticalmente a lo largo de la eslora del buque y que se representan sobre su plano diametral, en el segundo caso, las fuerzas horizontales aplicadas en las distintas secciones en las que se haya subdividido la eslora para su cálculo, mientras que las fuerzas de torsión se producen con respecto a un eje longitudinal.

4.2 Clasificación de las fuerzas sobre el casco del buque

De los diferentes tipos de fuerzas que actúan sobre el casco, para el estudio de los esfuerzos longitudinales y de torsión, se consideran por su grado de importancia y por la posibilidad de ser cuantificadas, a las siguientes:

1. Peso del casco, (incluido equipamiento), y de la carga, (combustible, lastre, carga comercial, etc.).

2. Empuje del buque en aguas tranquilas, con el buque parado.
3. Variación del empuje al considerar al buque entre olas, con el buque parado.

Con las dos primeras se hace el estudio estático de las fuerzas sobre el casco, ya que el resultado de las mismas no variará mientras no se modifique el estado de la carga del buque. Para el estudio dinámico del buque entre olas se considera como modelo de ola a la trocoidal con unas características determinadas y en dependencia de la eslora.

Está plenamente aceptado que ésta es una manera incompleta de realizar el estudio de los efectos que tienen las fuerzas que actúan sobre el casco del buque, pero lo interesante en este caso es que exista coherencia entre el cálculo de los esfuerzos máximos permitidos realizados durante el diseño del buque, y el método utilizado a bordo para calcular los esfuerzos correspondientes a una condición cualquiera de carga. Por esto es importante seguir las instrucciones que a tal efecto deben existir en la documentación del buque.

Evidentemente se puede hacer una clasificación mucho más amplia en la que se tengan en cuenta, además, fuerzas locales y otras de tipo especial, como la siguiente:

a) Fuerzas estáticas

Se consideran aquellas que varían con la condición de carga.

- Peso del casco y de la carga.
- Empuje del buque en aguas tranquilas, con el buque parado y navegando.
- Entrada en dique.

b) Fuerzas dinámicas

Son las de tipo oscilatorio.

- Buque entre olas.
- Fuerzas debidas a la superposición de los sistemas de olas producidas por el avance del buque con las olas de encuentro.
- Vibraciones debidas al paso de las olas.
- Movimientos del buque, afectando al empuje y produciendo variaciones en la distribución de los pesos debido a las aceleraciones.
- Fuerzas hidrodinámicas y vibraciones inducidas por el propulsor sobre el casco o apéndices del mismo.
- Fuerzas y vibraciones sobre el casco de los equipos de propulsión del buque.

c) Otras fuerzas

- Discontinuidades en la estructura del buque.

- Las producidas durante las operaciones de carga y descarga.
- Movimiento de líquidos en los tanques.
- Pantocazos.
- Por fines especiales de los buques.

4.3 Esfuerzos longitudinales. Teoría de la flexión de la viga

En el estudio de los esfuerzos longitudinales del buque se utiliza la teoría de la flexión de una barra prismática, o simplemente viga, por lo que se considera que el buque está formado por la viga-casco, aunque la geometría pueda presentar diferencias, en unos casos más notables que en otros, con respecto a la supuesta en la teoría de la viga.

Esta teoría se basa en que cuando la viga está sometida a flexión debido a un sistema de fuerzas aplicado sobre la misma, las secciones transversales se siguen manteniendo planas y normales al plano de simetría longitudinal, sabiendo, además, que todos los planos longitudinales-verticales son iguales. Durante la flexión de la barra, las secciones giran de manera que la cara convexa queda sometida a tracción y la cara cóncava a compresión. En la figura 4.1 se observan: dos secciones transversales, aa' y bb'; tracción en la parte superior y compresión en la inferior, por lo tanto, sometida a quebranto; y siendo EN la superficie neutra, la cual no sufre deformación de su longitud, es decir, no está sometida a alargamiento, siendo la línea neutra de una sección transversal la intersección entre aquella superficie y ésta.

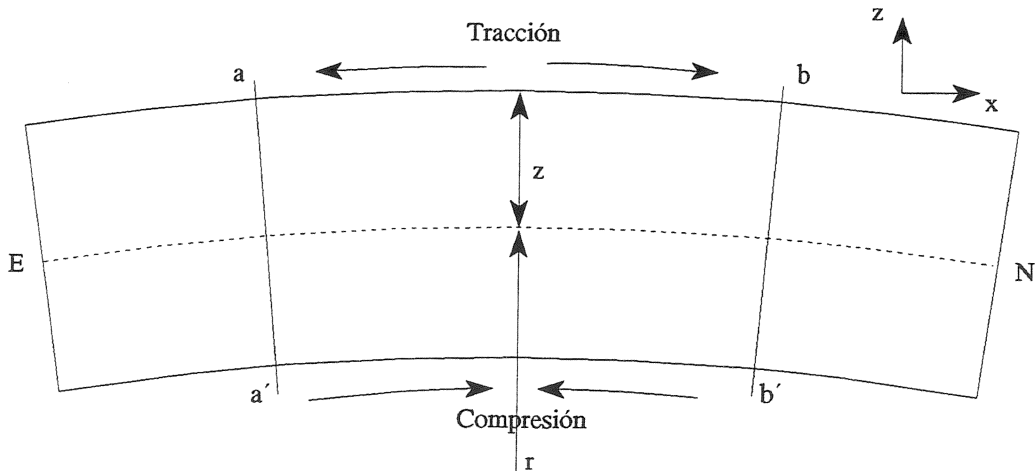


Fig. 4.1 Teoría de la flexión de la viga

La ley de Hook indica que, dentro de un cierto límite, el alargamiento de la viga es proporcional a la fuerza de tracción o compresión. Esta ley queda representada por la expresión,

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \quad (4.1)$$

siendo,

Δl	alargamiento de la viga
F	fuerza de tracción o compresión
l	longitud de la carga
A	área de la sección de la viga
E	módulo de elasticidad o de Young

El esfuerzo por unidad de área es,

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.2)$$

mientras que el alargamiento por unidad de longitud, o deformación unitaria, es la relación entre el alargamiento y la longitud de la viga, siendo el resultado un número adimensional,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4.3)$$

La ley de Hook expresada en función del esfuerzo y de la deformación, será

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.4)$$

lo que indica que el módulo de elasticidad tiene las mismas unidades que el esfuerzo.

Volviendo a la figura 4.1, el alargamiento, ε , correspondiente a una fibra longitudinal, tiene el valor,

$$\varepsilon = \frac{z}{r} \quad (4.5)$$

en la que r es el radio de curvatura. A partir de la ecuación 4.4 y de acuerdo con el alargamiento unitario anterior, se obtiene la ecuación del esfuerzo,

$$\sigma_x = \frac{E \cdot z}{r} \quad (4.6)$$

La fuerza que actúa sobre un elemento de área, dA , de una sección transversal, será el producto de ésta por el esfuerzo anterior,

$$\frac{E \cdot z}{r} \cdot dA \quad (4.7)$$

Integrando se obtiene el sistema de fuerzas que actúa sobre toda la sección, equivalente a un par cuya resultante será nula, por lo tanto,

$$\int \frac{E \cdot z}{r} \cdot dA = \frac{E}{r} \int z \cdot dA = 0 \quad (4.8)$$

Siendo constantes el módulo de elasticidad del material y el radio, para una condición de flexión determinada. Esto significa que la integral del momento estático del área con respecto al eje neutro es cero, o, de otra forma, que el eje neutro pasa por el centro de gravedad de la sección transversal.

El momento de la fuerza sobre un elemento de área con respecto a la línea neutra, será igual al producto,

$$\left[\frac{E \cdot z}{r} \cdot dA \right] \cdot z = \frac{E}{r} \cdot z^2 \cdot dA \quad (4.9)$$

Siendo z la distancia entre el centro de gravedad del elemento de área. dA , y el eje neutro. Integrando se obtendrá,

$$\int \frac{E}{r} \cdot z^2 \cdot dA = \frac{E}{r} \int z^2 \cdot dA \quad (4.10)$$

en donde,

$$\int z^2 \cdot dA = I_z \quad (4.11)$$

es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje neutro.

La ecuación 4.10 equivale, a su vez, al momento flector, M_F , producido por las fuerzas exteriores que actúan sobre la sección de la viga, entonces,

$$\frac{E}{r} \cdot I_z = M_F \quad (4.12)$$

Introduciendo la ecuación anterior en la ecuación 4.6, en lugar del radio, r , y del módulo de elasticidad, E ,

$$\sigma_x = \frac{M_F \cdot z}{I_z} \quad (4.13)$$

Y haciendo,

$$Z = \frac{I_z}{z} \quad (4.14)$$

en la que Z recibe la denominación de módulo o momento resistente de la sección transversal de la viga, se obtendrá el esfuerzo en función de los momentos flector y de resistencia,

$$\sigma_x = \frac{M_F}{Z} \quad (4.15)$$

La fatiga o esfuerzo máximo tendrá lugar en la fibra más alejada del eje neutro.

4.4 Momento flector máximo admisible

El módulo o momento resistente, deducido en el apartado anterior, es una medida de la resistencia estructural a la flexión de una sección transversal de la viga. En las ecuaciones 4.15, 4.14, 4.11 y 4.6,

$$\sigma_x = \frac{M_F}{Z}$$

$$Z = \frac{I_z}{z}$$

$$I_z = \int z^2 \cdot dA$$

$$\sigma_x = \frac{E \cdot z}{r}$$

vemos que es necesario calcular el momento de inercia del material de cada sección transversal considerada, con respecto al eje neutro, y que también interviene el módulo de elasticidad del material en la ecuación del esfuerzo.

El cálculo del módulo resistente de la sección transversal se realiza, de acuerdo con la teoría de la viga, bajo las hipótesis siguientes:

- a) Se supone que el material de la estructura de la sección es homogéneo y que tiene el mismo módulo de elasticidad cuando trabaja a tensión que cuando lo hace a compresión.
- b) Las fibras longitudinales flexan de manera que forman un arco, teniendo, por tanto, el mismo centro de curvatura, y, además, siendo el radio de curvatura grande en comparación con la altura de

la viga.

c) Tal y como ya se ha indicado en la teoría de la viga, las secciones transversales siguen siendo perpendiculares a la superficie neutra, al estar sometidas a flexión.

Cuando se diseña el buque, el valor del esfuerzo del material, σ , se obtiene a partir de su carga de rotura, a la que se le aplica un coeficiente de seguridad, lo que da como resultado una carga máxima admisible. A partir de esta carga máxima y del módulo resistente se hallará el momento flector máximo admisible en cada sección,

$$M_{F \text{ máx. admisible}} = \sigma_{x, \text{ máx. admisible}} \cdot Z \quad (4.16)$$

4.5 Esfuerzos longitudinales sobre el buque en aguas tranquilas

Para el buque flotando en aguas tranquilas, las fuerzas estáticas a considerar son el desplazamiento del buque y su empuje. La primera condición de equilibrio del buque indica que el desplazamiento es igual al empuje, pero si dividimos el buque en rebanadas transversales, esta condición de equilibrio no se dará en ellas, tomadas individualmente. En la figura 4.2 se han considerado, para simplificar, cuatro rebanadas transversales, existiendo predominio del peso en las cabezas y del empuje en el centro, a modo de ejemplo. La carga en cada rebanada es la diferencia entre el peso y el empuje de la misma, por lo tanto, en la figura se representa la distribución de las cargas.

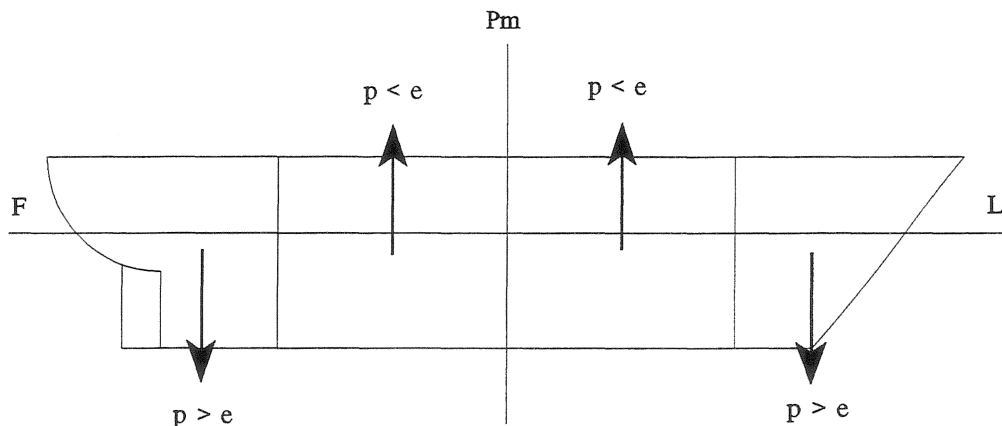


Fig. 4.2 Distribución de cargas

Si las rebanadas fueran independientes unas de otras, es decir, como si se tratara de cuatro flotadores autónomos, cada uno de ellos buscaría su propio equilibrio entre peso y empuje, variando para ello el calado.

En la realidad, lo que ocurre es que esta distribución de pesos y empujes a lo largo de la eslora del buque, da lugar a esfuerzos cortantes entre las rebanadas, resultando, finalmente, el correspondiente momento flector, cuyos efectos son la deformación de la viga-casco, bien sea en quebranto o en arrufo.

Las relaciones que se establecen entre las fuerzas anteriores, peso, empuje y carga, esfuerzo cortante y momento flector, son las siguientes:

a) Carga de una rebanada transversal

$$c = p - b \quad (4.17)$$

b) Carga del buque

$$c = D - B = 0 \quad (4.18)$$

Ya que debe cumplir la primera condición de equilibrio. Siendo,

D	desplazamiento del buque
B	empuje del buque
p	peso de la rebanada transversal
b	empuje de la rebanada transversal
c	carga

c) Relación entre la carga y el esfuerzo cortante

$$c = \frac{d(EC)}{dx} \quad (4.19)$$

EC	esfuerzo cortante
x	es igual a la eslora del buque

d) Relación entre el esfuerzo cortante y el momento flector

$$EC = \frac{d(MF)}{dx} \quad (4.20)$$

MF	momento flector
----	-----------------

e) Relación entre la carga, el esfuerzo cortante y el momento flector

$$c = \frac{d(EC)}{dx} = \frac{d^2 (EC)}{dx^2} \quad (4.21)$$

Como consecuencia de las ecuaciones 4.19, 4.20 y 4.21 anteriores, a partir de la carga se halla el esfuerzo cortante y el momento flector, ya que,

$$EC = \int_0^E c \cdot dx \quad (4.22)$$

E es el eslora del buque

$$MF = \int_0^E EC \cdot dx \quad (4.23)$$

o bien,

$$MF = \int_0^E \int_0^E c \cdot dx \cdot dx \quad (4.24)$$

4.6 Buque entre olas. Ola trocoidal

Al estar el buque entre olas, la distribución del empuje a lo largo de la eslora varía con el paso de la misma. Al ser la carga, en una rebanada transversal, igual al peso menos el empuje, al variar éste último con el paso de la ola, variará aquélla acordeamente. Ello a su vez comportará variaciones en los esfuerzos cortantes y en el momento flector. Las dos condiciones extremas a contemplar son cuando el buque tiene quebranto o arrufo en su zona central. En el primer caso, quebranto, el empuje domina en el centro del buque y los pesos en los extremos. En el segundo caso, arrufo, será justo al contrario, el peso es el dominante en la zona central del buque, mientras que en los extremos lo hace el empuje.

4.6.1 Ola trocoidal más perjudicial

Los estudios de los esfuerzos longitudinales se hacen, generalmente, considerando que el perfil de la ola sobre el plano diametral es el de una ola trocoidal recibida de proa o de popa. La ola más perjudicial para los esfuerzos del buque es, lógicamente, aquella que aumenta las condiciones de quebranto o de arrufo indicadas. Esto ocurrirá para una longitud de ola igual a la eslora de la flotación del buque, estando su cresta en el centro y los senos en las cabezas, o bien, para el seno de la ola en el centro y las crestas en las cabezas.

En la figura 4.3 se presenta a la ola con la cresta en el centro y se supone, además, que, de acuerdo con la distribución de pesos, el buque tiene quebranto, lo que a su vez significa que la cubierta estará sometida a tracción, mientras que el fondo lo estará a compresión.

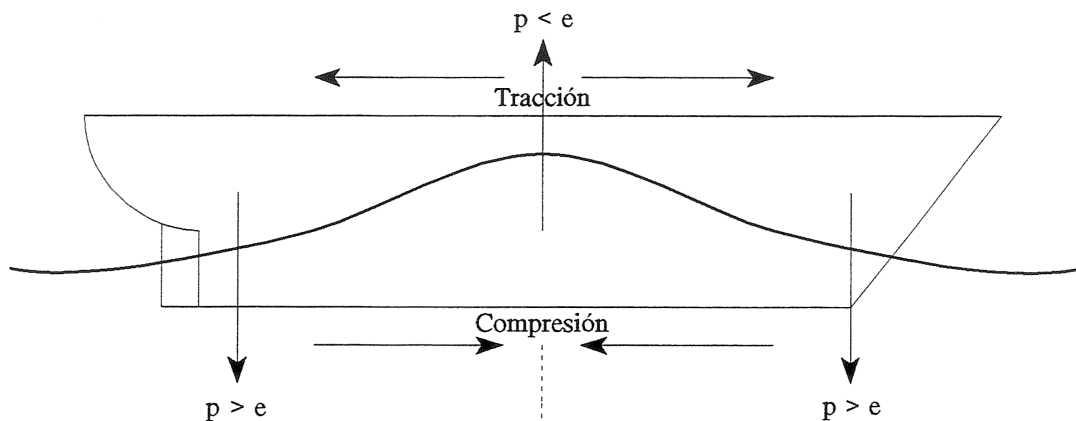


Fig. 4.3 Buque entre olas. Quebranto

La figura 4.4 corresponde a una condición de arrufo del casco, con el seno de la ola en el centro. La cubierta estará sometida a compresión y el fondo a tracción.

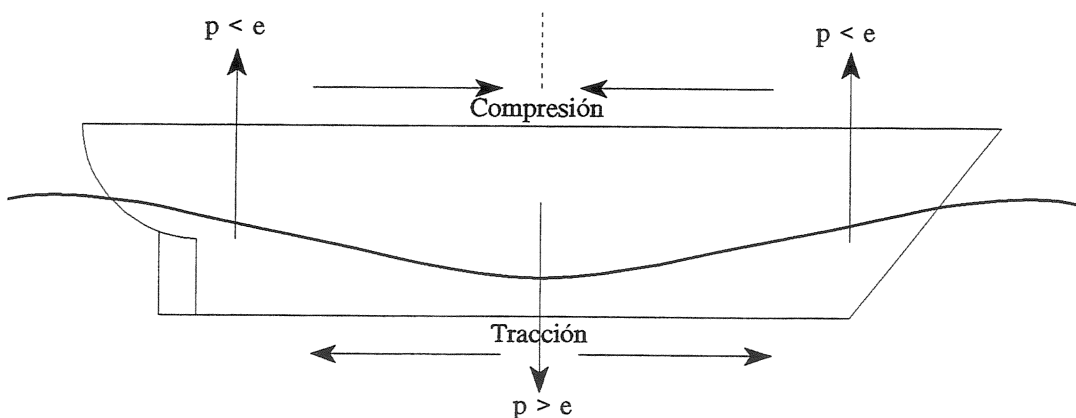


Fig. 4.4 Buque entre olas. Arrufo

Tratando el problema de una forma general y sin profundizar, debido al afinamiento de las formas en los extremos del buque, el empuje es menor que en la zona central. También la ubicación de la cámara de máquinas tiene una incidencia importante. Cuando está en el centro del buque, es usual que el momento flector máximo corresponda a una situación de quebranto, y si la cámara de máquinas está a popa, es probable que el momento flector máximo sea para el arrufo.

Otro punto de interés es la altura de la ola. Existen diferentes fórmulas que relacionan la altura con la longitud, de las cuales se van a mencionar las dos de más uso. La primera de ellas establece que la altura de la ola es igual a $1/20$ de su longitud,

$$H_w = \frac{L_w}{20} \quad (4.25)$$

Y la segunda,

$$H_w = 1,1 \sqrt{L_w}$$

para la altura y la longitud de la ola en pies. Pasando a metros estos dos parámetros, la fórmula quedará de la manera siguiente,

$$H_w = 0,607 \sqrt{L_w} \quad (4.26)$$

A la vista de la tabla 4.1, está claro que los perfiles de la ola variarán al aplicar una u otra fórmula, e incluso de forma substancial según la longitud de la ola que se considere.

Tabla 4.1 Alturas de las olas relacionadas con su longitud

L_w (m)	H_w (m) $L_w/20$	H_w (m) $0,607 \sqrt{L_w}$
50	2,50	4,29
100	5,00	6,07
150	7,50	7,43
200	10,00	8,58
250	12,50	9,60
300	15,00	10,51
350	17,50	11,36
400	20,00	12,14

4.6.2 Perfil de la ola trocoidal sobre el plano diametral

Partiendo de la condición establecida de que la longitud de la ola es igual a la eslora de la flotación, y de la ecuación 1.50 y 1.51, se obtendrán las coordenadas de los distintos puntos que conforman el perfil de la ola trocoidal,

$$x = R \cdot \theta + r \cdot \text{sen } \theta$$

$$z = R + r \cdot \cos \theta$$

siendo θ el ángulo girado por el radio R .

Para,

$$H_w = \frac{L_w}{20}$$

$$x = \frac{L_w}{2\pi} \cdot \theta + \frac{L_w}{40} \cdot \text{sen } \theta$$

$$z = \frac{L_w}{2\pi} + \frac{L_w}{40} \cdot \cos \theta$$

Y para,

$$H_w = 0,607 \sqrt{L_w}$$

$$x = \frac{L_w}{2\pi} \cdot \theta + \frac{0,607 \sqrt{L_w}}{2} \cdot \text{sen } \theta$$

$$z = \frac{L_w}{2\pi} + \frac{0,607 \sqrt{L_w}}{2} \cdot \cos \theta$$

En el apartado 2.8 se vio que la línea horizontal de centros de las órbitas no era simétrica, siendo menor el área de la parte superior, cresta, que la parte inferior, seno, quedando el correspondiente nivel de la mar en calma que limita el mismo volumen sumergido, por debajo de la línea de centros, un valor igual a, (Ec. 2.48 y Fig. 2.8),

$$\delta z = \frac{r^2}{2R}$$

No obstante lo indicado con respecto a la longitud de la ola, es posible que se tome su valor igual a la eslora entre perpendiculares en lugar de la eslora en la flotación. Esto dará una longitud de ola algo mayor o menor que la correspondiente, lo que se traducirá en un ligero aumento del momento flector, tanto en la condición de quebranto como en la de arrufo, como se desprende de la posición de la ola sobre el plano diametral. Esto no debe ser importante ya que el cálculo de los esfuerzos cortantes y momentos flectores, como se ha indicado, son comparativos, y, por lo tanto, deben hacerse para las

condiciones utilizadas en el diseño.

4.7 Curva de pesos

La curva de pesos debe representar la distribución longitudinal de los mismos a lo largo de la eslora del buque. Para obtener esta distribución se divide la eslora con un número determinado de secciones situadas a intervalos constantes, por ejemplo, veintiuna divisiones que delimitarán veinte rebanadas transversales.

Según el tipo de buque, en lugar de utilizar intervalos constantes entre secciones, es una buena solución operativa el que la distribución de las rebanadas se haga de acuerdo con la ubicación y la homogeneidad de los grandes pesos no continuos. Por ejemplo, cada sección transversal de los tanques de carga de un petrolero puede constituir una rebanada.

En cualquiera de los dos casos propuestos, el peso total de cada rebanada dividido por su eslora, dará el peso medio por unidad de eslora, (Tm/m), en aquella rebanada transversal. Una manera habitual de trabajar es agrupando los pesos de la forma siguiente:

- Peso del buque en rosca
- Pesos en los tanques de servicio
- Carga en bodegas y cubierta

La manera de presentar los datos suele ser mediante un sistema de coordenadas rectangular. La eslora del buque, a una escala determinada, se sitúa sobre el eje de abscisas, mientras que la escala de peso por unidad de longitud va sobre el eje de ordenadas, (Fig. 4.5 y Apéndice).

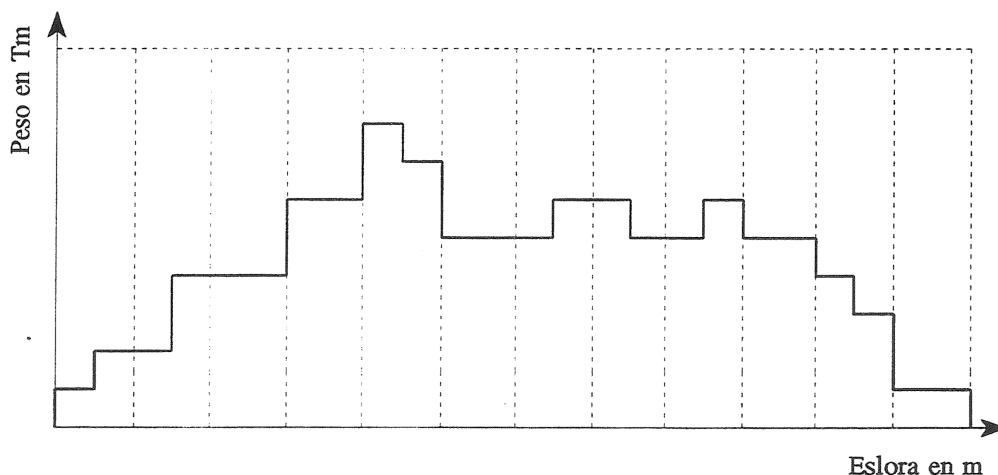


Fig. 4.5 Curva de pesos

De acuerdo con la propuesta realizada para hallar la distribución del desplazamiento del buque sobre

la eslora, la curva representativa no será tal, sino que tendrá forma escalonada.

4.8 Curva de empujes

El cálculo se realizará para tres curvas de empujes diferentes, ya que al buque se le supone flotando en aguas tranquilas o entre olas, y en este segundo caso con la cresta o con el seno de la ola en el centro del buque, tal y como se ha explicado en el apartado 4.6, (Figs. 4.2, 4.3 y 4.4).

Las dos condiciones para que el buque esté en equilibrio son:

- Desplazamiento igual a empuje
- Centro de gravedad del buque y centro de carena en la misma vertical

El proceso se inicia, pues, situando la superficie sobre el plano diametral del buque, que además debe contener las curvas de Bonjean, las cuales se utilizarán para calcular: el volumen por unidad, de cada sección transversal; el volumen total sumergido que deberá ser igual al desplazamiento del buque para cumplir con la primera de las condiciones de equilibrio; y la posición longitudinal del centro de carena que, según se ha indicado, debe de estar en la vertical del centro de gravedad. El número de divisiones a intervalos constantes puede ser el mismo que el utilizado para la curva de pesos.

4.8.1 Curvas de Bonjean

A continuación se introducen de forma sencilla en qué consisten las curvas de Bonjean y el uso que se requiere de ella en el cálculo del empuje del buque y de la posición longitudinal del centro de carena.

Sobre el plano longitudinal del buque se sitúan un número de cuadernas o secciones transversales a intervalos comunes. Junto a cada cuaderna está la curva de áreas de su sección a diferentes calados y la curva de momentos longitudinales de estas áreas con respecto a la cuaderna maestra, (Fig. 4.6).

Las ordenadas de estas curvas son,

$$\omega = 2 \int_0^z y \cdot dz$$

$$M_{\otimes} = \int_{-E/2}^{+E/2} \omega \cdot x \cdot dx$$

ω	área de la sección transversal
M_{\otimes}	momento del área de la sección transversal con respecto a la cuaderna maestra
z	calados
y	semimangas
x	brazos longitudinales

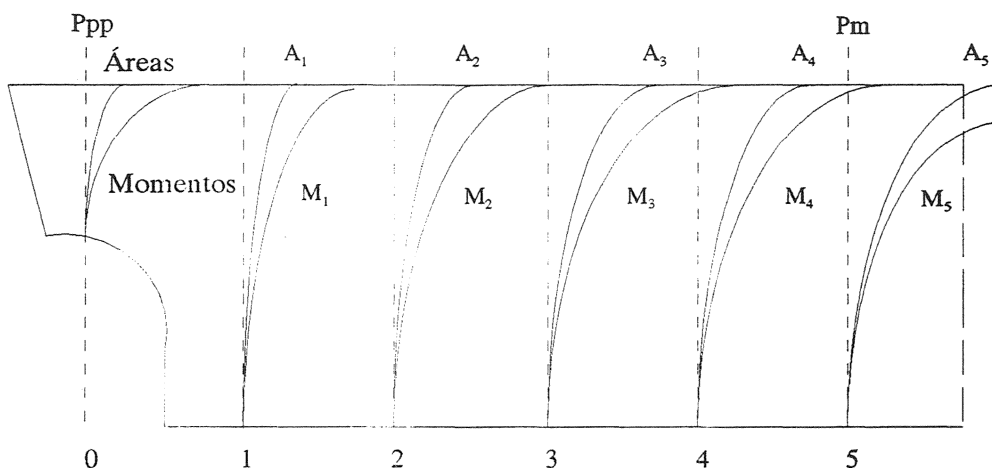


Fig. 4.6 Curvas de Bonjean

Se dibuja la flotación del buque o el perfil de la ola considerada sobre el plano diametral, obteniéndose unos puntos de corte en cada una de las cuadernas. Desde estos puntos se trazarán unas paralelas a la línea base, dando sus intersecciones con las curvas las áreas y momentos de cada sección para la flotación considerada, (Fig. 4.7). A partir de estos datos se calculará el empuje unitario de cada sección, el volumen sumergido, el empuje del buque, y la posición longitudinal del centro de carena,

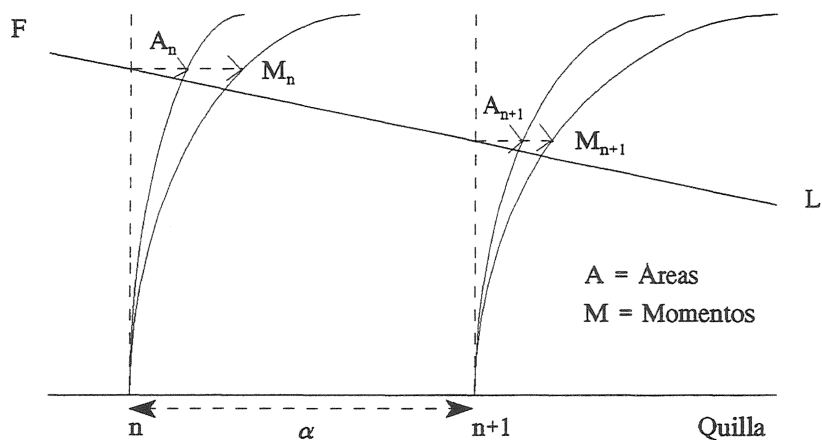


Fig. 4.7 Obtención del área y del momento de cada sección, para una flotación determinada

$$\nabla = \int_{-E/2}^{+E/2} \omega \cdot dx$$

$$B = \nabla \cdot \gamma$$

$$x_C = \frac{M_{\otimes}}{\nabla} = \frac{\int_{-E/2}^{+E/2} \omega \cdot x \cdot dx}{\int_{-E/2}^{+E/2} \omega \cdot dx}$$

Siendo,

∇ volumen sumergido del buque
 B empuje del buque
 $E/2$ mitad de la eslora del buque
 x_C posición longitudinal del centro de carena

4.8.2 Curvas de empujes para el buque en aguas quietas y entre olas

Una vez calculada la distribución del empuje a lo largo de la eslora para las tres condiciones propuestas, a saber:

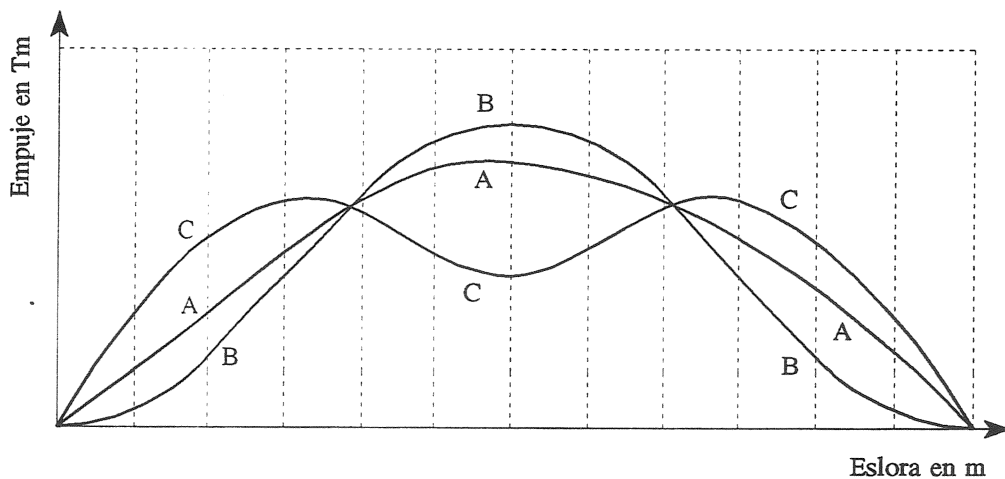


Fig. 4.8 Curvas de empujes para los casos A), B) y C)

- A) buque flotando en aguas tranquilas,
- B) buque entre olas con la cresta en el centro,
- C) buque entre olas con el seno en el centro,

se trazarán las gráficas correspondientes, tomando para ello las mismas coordenadas que en el caso de la curva de pesos, es decir, la eslora del buque en el eje de abscisas y el empuje por unidad de longitud en el de ordenadas, (Fig. 4.8). Las curvas de empujes empiezan y terminan en la ordenada cero, como es lógico.

Desde el punto de vista del marino, lo más familiar es tomar como positivos los valores de la curva de pesos. Si esto es así, se deberá considerar que los valores de la curva de empujes son negativos. En el apéndice se observa esta situación para las curvas de pesos y empujes. Sin embargo, también es una buena práctica la de presentar ambas curvas en la zona de valores positivos, es decir, por encima del eje de abscisas, ya que de esta manera se puede hacer una comparación visual que, por ejemplo, puede indicarnos si el buque está en una condición de quebranto o bien de arrufo, (Fig. 4.9).

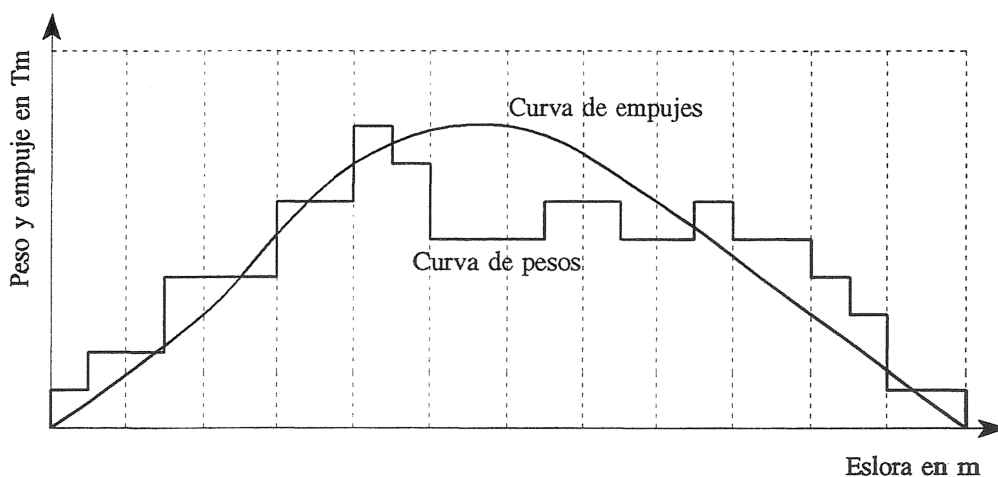


Fig. 4.9 Curvas de pesos y empujes

4.9 Curvas de cargas, esfuerzos cortantes y momento flector

La distribución irregular de pesos y empujes a lo largo de la eslora produce esfuerzos cortantes y, en consecuencia, un momento flector sobre la viga-casco.

4.9.1 Curva de cargas

La carga en un punto cualquiera de la eslora del buque es igual a,

$$\text{carga} = \text{peso} - \text{empuje}$$

Por lo tanto, para obtener los puntos que unidos darán lugar a la curva de cargas, se calcula la diferencia indicada en cada una de las secciones transversales en que se ha dividido el buque. Siguiendo con la propuesta de los apartados anteriores, se toma el peso como valor positivo y el empuje como negativo, aunque nada impide que pudiera ser justamente al contrario. El resultado de estas operaciones será la curva de cargas, o curvas de cargas si se tienen en cuenta los empujes del buque flotando en aguas quietas o entre olas.

En la curva de cargas, el área positiva será igual al área negativa, ya que tomando al buque en su globalidad, el desplazamiento y el empuje son iguales, en consecuencia, el valor neto del área encerrada por la curva será cero. Donde la curva tenga valores positivos, indicará que el peso por unidad de longitud es superior al del empuje, también por unidad de longitud, y al revés para valores negativos de la curva de cargas. Ésta permitirá ver fácilmente si el buque estará sometido a deformación por quebranto o arrufo, e intuir la importancia de la misma. Desde la perspectiva de los esfuerzos longitudinales del buque, el reparto de pesos debe ser tal que la curva se separe lo mínimo posible del eje de abscisas, (Fig. 4.10 y Apéndice).

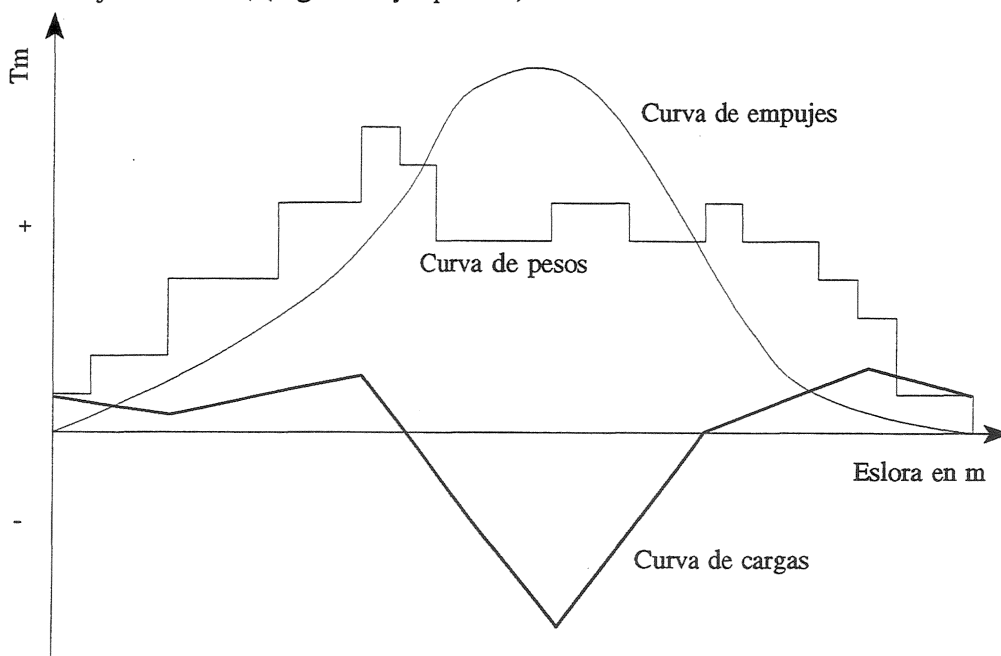


Fig. 4.10 Curva de cargas

4.9.2 Curva de esfuerzos cortantes

En la ecuación 4.22 se dio la relación que existe entre los esfuerzos cortantes y las cargas que sufre el buque,

$$EC = \int_0^E c \cdot dx$$

Por lo tanto, la curva de esfuerzos cortantes se puede obtener integrando la curva de cargas. Dado que la curva no puede expresarse por medio de alguna función a la que se pueda aplicar las técnicas de integración conocidas, hay que recurrir a los métodos aproximados, como son el de trapecios y los de Simpson, entre otros. Lo más usual es calcular las áreas de los trapecios formados por dos ordenadas consecutivas de la carga, que serán las bases, y el intervalo de la eslora, que será la altura, lo que supone sustituir la curva que cierra el trapecio por su cuerda.

Generalmente se integra de popa a proa, aunque también es fácil hallar integraciones que se inician por la popa, debiendo terminar la curva de esfuerzos cortantes cerrando el área delimitada por la misma, es decir, la curva de esfuerzos cortantes empezará y terminará en cero. En el caso, muy probable, de que exista en el cierre de la curva, en el extremo de proa, una pequeña diferencia, esto es, que la curva quede ligeramente por encima o por debajo del eje de abscisas, esta diferencia se repercutirá a lo largo de toda la eslora del buque, aumentando o disminuyendo el valor de las ordenadas de la carga, según sea el caso, proporcionalmente a la distancia de las mismas a la popa, según la expresión siguiente,

$$\Delta(ec) = \frac{\Delta(EC)}{E} \cdot d_{pp}$$

$$\Delta(EC) = - EC_{proa}$$

siendo,

$\Delta(ec)$ incremento a sumar o restar en cada ordenada o sección, de acuerdo con el signo que se obtenga para $\Delta(EC)$

$\Delta(EC)$ es igual al valor del esfuerzo cortante obtenido en la proa, pero de signo contrario

E eslora del buque

d_{pp} distancia desde la popa a la sección para la que se calcule $\Delta(ec)$

De esta forma se obtendrá la curva de esfuerzos cortantes rectificada. Se insiste en que la aplicación de lo anterior está dirigido a corregir errores pequeños debidos a las aproximaciones realizadas durante la integración de la curva de cargas, o algún pequeño descuadre entre las curvas de pesos y empujes. Errores de mayor cuantía obligarán a revisar el cálculo y efectuar las correcciones oportunas.

Las características más importantes de la curva de esfuerzos cortantes, (Fig. 4.11 y Apéndice), son las siguientes:

- La curva de esfuerzos cortantes es nula en la popa y en la proa, que son los puntos inicial

y final de la misma.

- Donde la curva de cargas sea igual a cero, la de esfuerzos cortantes presentará un valor máximo.
- En el punto de la eslora del buque que la curva de cargas tenga un valor máximo, la curva de esfuerzos cortantes tendrá inflexión.

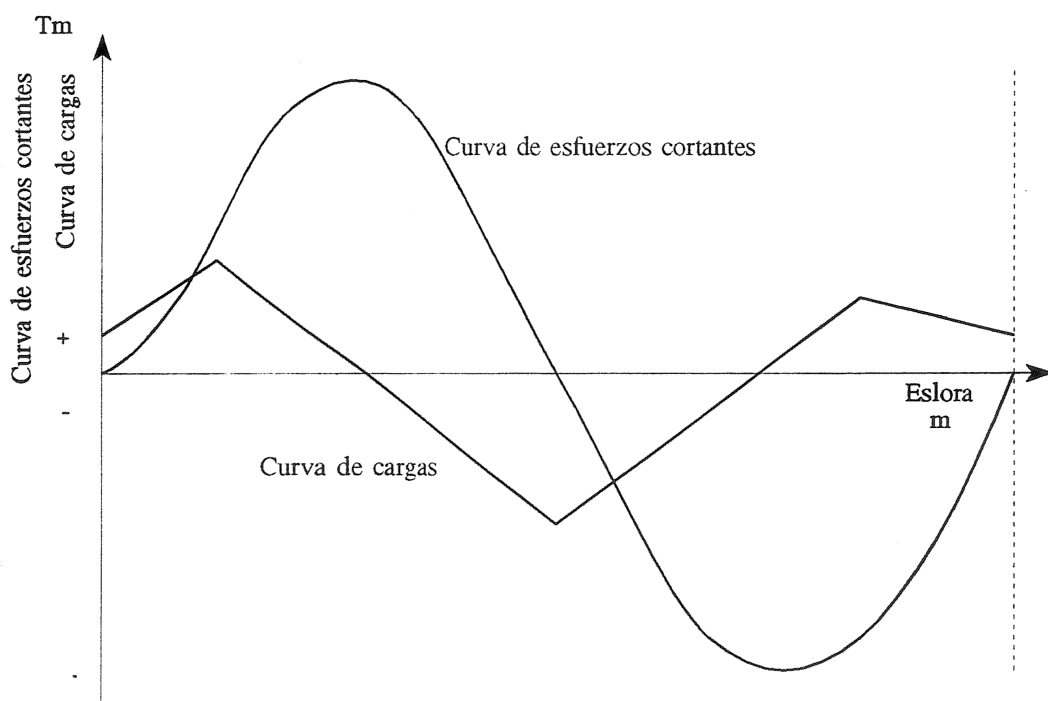


Fig. 4.11 Curvas de cargas y esfuerzos cortantes

4.9.3 Curva del momento flector

De acuerdo con las ecuaciones 4.24 y 4.23,

$$MF = \int_0^E \int_0^E c \cdot dx \cdot dx$$

$$MF = \int_0^E EC \cdot dx$$

la curva del momento flector se obtiene de la integración por dos veces de la curva de cargas o integrando la curva de esfuerzos cortantes. Para su cálculo, se deben tener en cuenta las consideraciones que se han hecho en el subapartado anterior en lo que se refiere al método aproximado, al sentido de la integración y al cierre de la curva.

Las características de la curva del momento flector y su relación con respecto a la curva de esfuerzos cortantes serán las propias entre las curvas de una función y de su integral. A continuación se citan las características más importantes, (Fig. 4.12 y Apéndice):

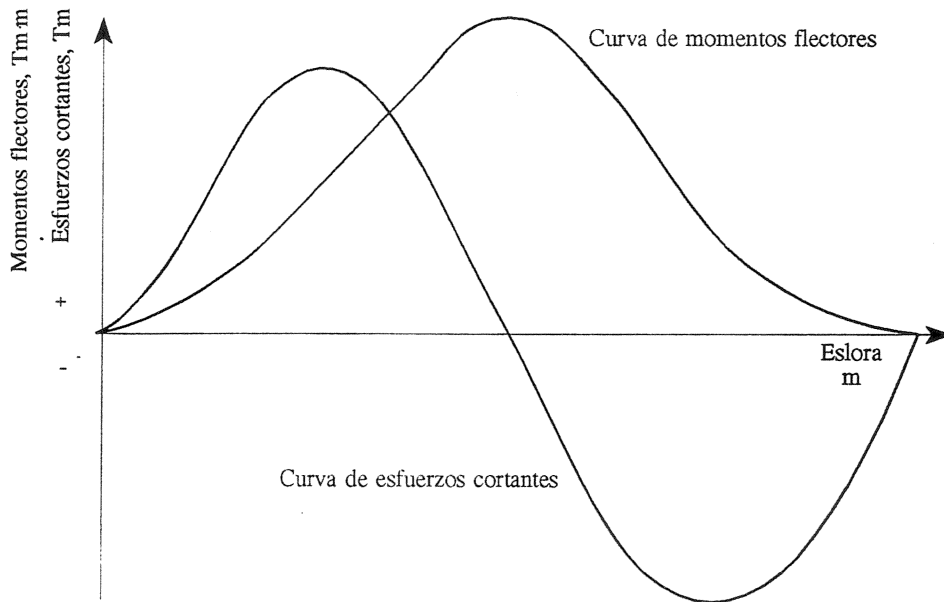


Fig. 4.12 Curvas de esfuerzos cortantes y momento flector

- La curva del momento flector parte de cero en la popa y finaliza con valor cero, también, en la proa.
- En aquellos puntos en los que el esfuerzo cortante tiene un valor máximo, la curva del momento flector tendrá las correspondientes inflexiones.
- Cuando la curva de esfuerzos cortantes corte al eje de abscisas, por lo tanto su valor sea cero, la curva del momento flector presentará, en este punto, un máximo o un mínimo.

4.9.4 Curvas típicas de esfuerzos cortantes y momento flector

Una presentación típica de las curvas de esfuerzos cortantes y momento flector es la que se desprende de las figuras 4.11, 4.12 y del apéndice. Los detalles más interesantes de estas curvas son los siguientes:

- El valor de ambas curvas en los extremos de popa y de proa es cero, tal y como ya se ha comentado.
- La curva de esfuerzos cortantes suele alcanzar sus valores máximo y mínimo en dos puntos situados aproximadamente a una cuarta parte de la eslora, tomada a partir de la popa y de

la proa. Hacia la mitad de la eslora, el esfuerzo cortante tiene valor nulo ya que su curva corta al eje de abscisas.

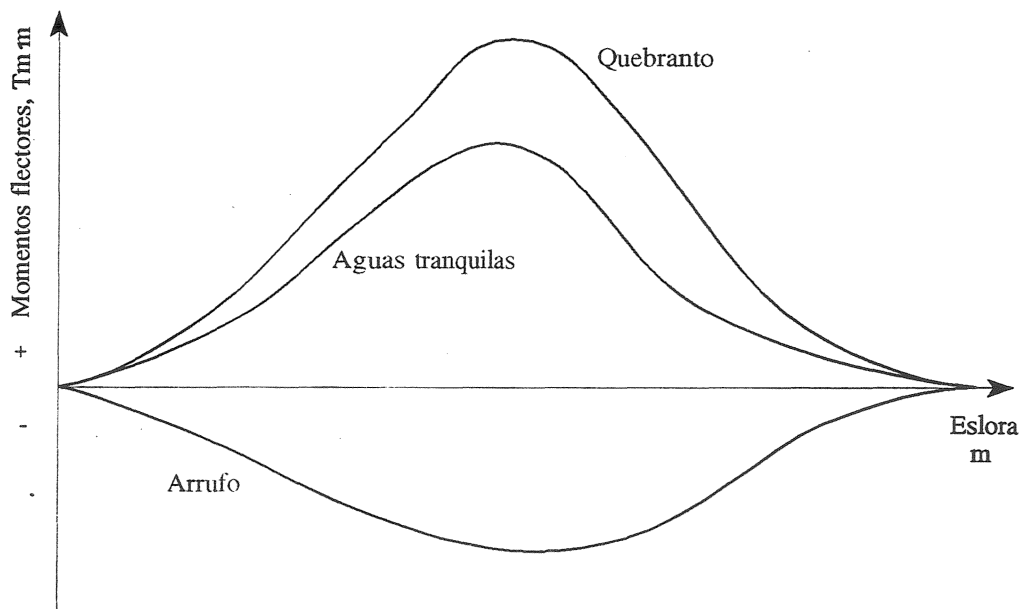
- Por lo tanto, la curva parte de cero en el extremo de popa, alcanza un máximo, o mínimo, hacia la cuarta parte de la eslora, busca al eje de abscisas cortándole hacia la mitad de la eslora y cambiando de signo, llega a un mínimo, o máximo, hacia las tres cuartas partes de la eslora y cierra la curva en cero en el extremo de proa.

- La curva del momento flector partirá de cero en el extremo de popa, tendrá dos puntos de inflexión que corresponderán a los dos máximos de la curva de esfuerzos cortantes, el valor máximo lo alcanzará hacia la mitad de la eslora coincidiendo con el valor nulo del esfuerzo cortante, y, finalmente, la curva cerrará en el extremo de proa.

4.9.5 Valores máximos admisibles de esfuerzos cortantes y momentos flectores

Al final, lo que interesa en el estudio de los esfuerzos longitudinales es comparar los valores de las curvas de esfuerzos cortantes y momento flector con los valores máximos admisibles a lo largo de la eslora del casco, los cuales dependerán del material utilizado, de su disposición y del escantillonado de las planchas y demás elementos estructurales.

En la figura 4.13 se presenta un supuesto de momentos flectores estando el buque flotando en aguas quietas y entre olas. En el ejemplo, se considera que en aguas quietas el buque está sometido a quebranto. Esta deformación se incrementa cuando el buque está entre olas con la cresta en el centro, y pasa a ser de arrufo cuando el buque flota con el seno de la ola en el centro del plano diametral.



4.13 Curvas de momentos flectores en aguas tranquilas y entre olas

De las situaciones de quebranto y arrufo se considerará aquella que tenga mayor valor. Aparte de como se cargue el buque, la tendencia a la deformación de quebranto o de arrufo tiene dependencia del tipo de buque, de sus formas y de la ubicación de la cámara de máquinas. De forma general, se puede indicar que en buques de carga de formas llenas, en sus máximos calados y máquina en el centro, el momento máximo suele corresponder al quebranto, mientras que con máquina a popa será dominante la condición de arrufo.

4.10 Cálculo de los esfuerzos longitudinales

Se va a plantear a través de tablas y de las explicaciones complementarias, cómo realizar el cálculo de las cargas, esfuerzos cortantes y momentos flectores de las secciones, que a su vez permitirán dibujar las curvas correspondientes.

El cálculo parte de los datos de los pesos y empujes por unidad de longitud de las secciones intermedias, tal como se ve en la tabla 4.2. En ella se suponen veintiuna secciones transversales, a intervalos comunes, quedando, por tanto, el buque dividido en veinte rebanadas. La numeración de las secciones va de la 0 a la 20, y las rebanadas se numerarían de la 1 a la 20.

Tabla 4.2 Cálculo de las cargas

Número de sección	Pesos Tm/m	Empujes Tm/m	Cargas Tm/m
0			
$\frac{1}{2}$			
1			
$1\frac{1}{2}$			
2			
$2\frac{1}{2}$			
3			
...
18			
$18\frac{1}{2}$			
19			
$19\frac{1}{2}$			
20			

En la tabla 4.3 se calculan los esfuerzos cortantes. Para ello se multiplican las cargas de la tabla 4.2 por el valor del intervalo, o eslora, entre secciones, que será constante. Este producto representa el esfuerzo cortante parcial de la rebanada para la sección que la limita, (la de orden superior). Acumulando los esfuerzos de los parciales en la columna de "Esfuerzos cortantes" se obtendrán los valores para cada sección. Si la última sección no es cero, es decir, si arrastra errores pero su valor es aceptable, se procederá a su corrección. Para ello se puede trabajar tal como se ha indicado en el subapartado 4.9.2 al hablar de la curva de esfuerzos cortantes, o bien, se puede actuar tal como se explica a continuación. Se divide el valor del error por veinte, que es el número de rebanadas, y el resultado se multiplica por el número de orden de la rebanada. Este valor con el signo contrario al del error, es el que se sumará algebraicamente al esfuerzo cortante obteniendo el valor de la columna "EC corregido".

Tabla 4.3 Cálculo de los esfuerzos cortantes

Número de sección	Carga Tm/m	Carga x intervalo Tm/m x m	Esfuerzos cortantes Tm	Correc- ción Tm	EC corregido Tm
0		0	0	0	0
½					
1					
1½					
2					
2½					
3					
...
18					
18½					
19					
19½					
20					

Una vez calculados los esfuerzos cortantes, corregidos en su caso, se llevan a la columna correspondiente de la tabla 4.4, para realizar el cálculo de los momentos flectores. El método aproximado de integración que se utiliza es el de los trapecios, por ello se calcula el esfuerzo cortante medio, que multiplicado por el intervalo común dará el momento flector de la rebanada para su sección límite, como ocurrió antes con el cálculo de los esfuerzos cortantes. El acumulado de estos

parciales dará el momento flector en cada sección, recordando que se inicia en cero. Si hay corrección se procederá como en el caso anterior.

Tabla 4.4 Cálculo de los momentos flectores

Núm. de sección	Esfuerzos cortantes Tm	Esfuerzo cortante medio	EC x int. Tm x m	Momentos flectores Tm x m	Correc- ción Tm x m	MF corregido Tm x m
0	0		0	0	0	0
½						
1						
1½						
2						
2½						
3						
...
18						
18½						
19						
19½						
20						

Por supuesto, se puede crear una única tabla para hacer sobre ella todos los cálculos.

4.11 Momento flector: líneas de influencia

La descarga de pesos pequeños, normalmente debidos a los consumos realizados durante la navegación, modificará el momento flector máximo del buque calculado para la condición de salida de puerto. Es evidente que se puede realizar un nuevo cálculo teniendo en cuenta esta circunstancia, pero el objetivo de este apartado es presentar una solución alternativa, aunque sólo aproximada, conocida con el nombre de "líneas de referencia".

Una línea de influencia muestra el efecto que tendrá la unidad de peso descargada, o cargada, de un punto cualquiera de la quilla del buque, sobre el momento flector. De entre todas las posibles líneas

de influencia, las que más interesan son aquellas que indican la variación que sufre el momento flector máximo en las condiciones de quebranto y arrufo.

Para conocer cómo se construye la gráfica de las líneas de influencia, considérese la descarga de un peso, p , situado a popa de la sección del momento flector máximo y a una distancia d_F del centro de flotación, tal como se muestra en la figura 4.14. Esto causará una emersión paralela y una alteración del asiento que será aproante.

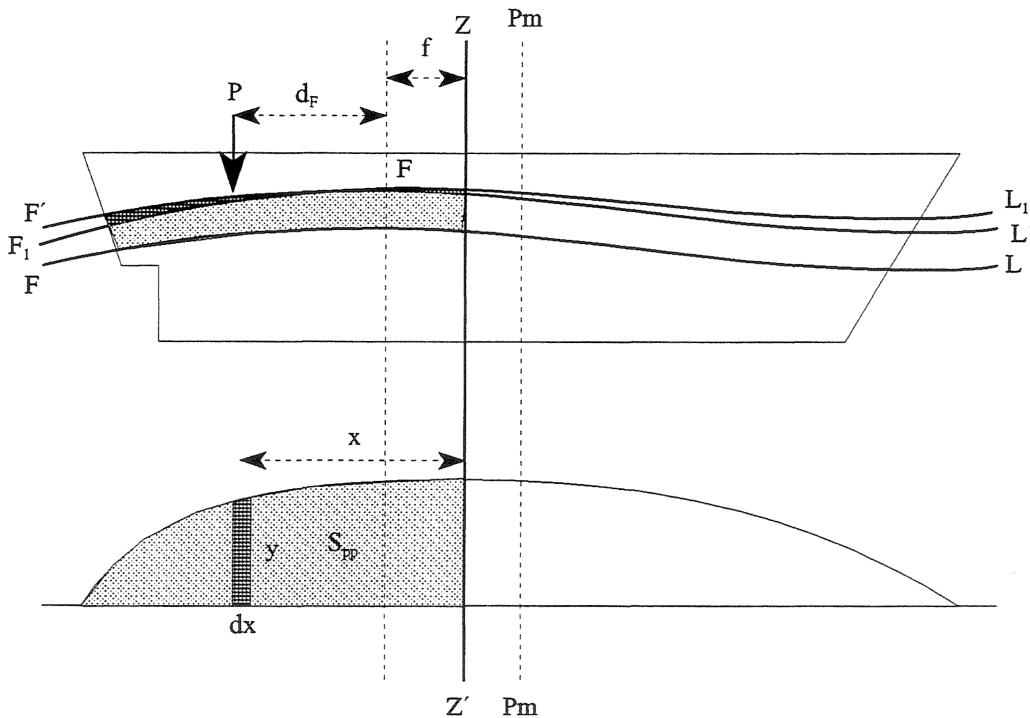


Fig. 4.14 Cálculo de las líneas de influencia

La inmersión paralela y la alteración producidas por la carga de un peso, entendiendo que la descarga es una carga con signo negativo, serán

$$IP = \frac{p}{T_c}$$

$$IP_{(m)} = \frac{p}{100 \cdot T_c} \quad (4.27)$$

siendo,

IP	inmersión paralela, en cm
IP _(m)	inmersión paralela, en metros
p	peso a cargar, en Tm
T _c	toneladas por centímetro de inmersión, en Tm/cm

Las toneladas por centímetro, tienen por expresión,

$$T_c = S_F \cdot 0,01 \cdot \gamma \quad (4.28)$$

S _F	superficie de flotación, en m ²
γ	densidad en Tm/m ³

Introduciendo la ecuación 4.28 en la 4.27, la fórmula de la inmersión paralela será la siguiente,

$$IP_{(m)} = \frac{p}{S_F \cdot \gamma} \quad (4.29)$$

La fórmula de la alteración usualmente utilizada es,

$$a = \frac{p \cdot d_F}{M_u} \quad (4.30)$$

en la que,

a	alteración del asiento, en cm
p	peso de la carga, en Tm
d _F	distancia longitudinal desde el centro de gravedad de la superficie de flotación, F, al punto de carga del peso, en metros
M _u	momento unitario para variar el asiento en un centímetro, en Tm·m/cm

A la fórmula de la alteración se le van a efectuar unos cambios para ponerla en función de la inercia longitudinal, I_L, de la superficie de flotación con respecto a un eje transversal que pase por F, centro de gravedad de la flotación.

$$M_u = \frac{D \cdot GM_L}{100 \cdot E}$$

Siendo GM_L la altura metacéntrica longitudinal igual a,

$$GM_L = \frac{I_L}{\nabla}$$

Sustituyendo en la ecuación del momento unitario,

$$M_u = \frac{\nabla \cdot \gamma \cdot \frac{I_L}{\nabla}}{100 \cdot E}$$

$$M_u = \frac{\gamma \cdot I_L}{100 \cdot E}$$

Introduciendo este valor del momento unitario en la ecuación 4.30,

$$a = \frac{p \cdot d_F}{\frac{\gamma \cdot I_L}{100 \cdot E}}$$

$$a = \frac{p \cdot d_F \cdot 100 \cdot E}{\gamma \cdot I_L}$$

$$a_{(m)} = \frac{p \cdot d_F \cdot E}{\gamma \cdot I_L} \quad (4.31)$$

D	desplazamiento, en Tm
∇	volumen sumergido, en m ³
GM _L	altura metacéntrica longitudinal, en m
E	eslora del buque, en m
I _L	inercia longitudinal de la superficie de flotación, con respecto a un eje transversal que pasa por su centro de gravedad, F
γ	densidad, en Tm/m ³

La variación del momento flector máximo en ZZ' de la figura 4.14, se determina mediante la suma algebraica de los tres términos siguientes:

- momento del peso,
- momento del empuje de la inmersión paralela a popa del eje ZZ', y
- momento del empuje de las cuñas debidas a la alteración del asiento, también a popa del eje ZZ'.

Para abreviar les llamaremos:

- momento del peso,
- momento de la inmersión, y
- momento de las cuñas.

Recordemos que a la carga de un peso le hemos dado el signo positivo y al aumento del empuje signo negativo. En caso de descarga los signos serían justo al contrario. A continuación se van a calcular los tres momentos.

a) *Momento del peso, M_p*

$$M_p = p \cdot (d_F + f) \quad (4.32)$$

f es la distancia longitudinal entre el eje ZZ' , en donde se produce el momento flector máximo para la condición de carga considerada, y el centro de flotación. El signo de f se tomará positivo si el centro de flotación está a popa de ZZ' y negativo si está a proa.

b) *Momento de la inmersión paralela, M_b*

El empuje de la inmersión paralela de la zona de popa, será igual a

$$IP_{(m)} \cdot S_{pp} \cdot \gamma$$

S_{pp} superficie de la flotación a popa del eje ZZ'

El momento del empuje de la inmersión paralela a popa de la sección ZZ' , tendrá por valor,

$$M_b = IP_{(m)} \cdot S_{pp} \cdot \gamma \cdot d_{ZZ'}$$

$d_{ZZ'}$ brazo longitudinal entre el eje ZZ' y el centro de gravedad de la rebanada de la flotación a popa de dicho eje

Substituyendo la inmersión paralela por el valor obtenido en la ecuación 4.29,

$$M_b = \frac{p}{S_F \cdot \gamma} \cdot S_{pp} \cdot \gamma \cdot d_{ZZ'}$$

Al ser,

$$M_{pp} = S_{pp} \cdot d_{ZZ'}$$

en la que,

M_{pp} momento de la superficie de flotación a popa del eje ZZ' , con respecto al mismo eje

El momento de empuje de la inmersión paralela a popa de la sección ZZ' , correspondiente al momento flector máximo, tendrá por valor

$$M_b = p \cdot \frac{M_{pp}}{S_F} \quad (4.33)$$

c) *Momento de las cuñas, M_{bc}*

El momento del empuje de las cuñas a popa del eje ZZ' con respecto al mismo eje, se obtendrá mediante las operaciones siguientes:

- Se halla el volumen elemental de la cuña,

$$dv = 2y \cdot dx \cdot (x - f) \cdot \tan \psi$$

La tangente del ángulo de la inclinación longitudinal es igual a la alteración partida por la eslora del buque, luego

$$\tan \psi = \frac{a}{E}$$

$$dv = 2y \cdot dx \cdot (x - f) \cdot \frac{a}{E}$$

En la que y representa a las semimangas de la superficie de flotación de las cuñas, dx la eslora de la superficie elemental, y (x-f) la distancia al centro de flotación, que multiplicada por a/E dará la altura de la cuña, (Fig. 4.14).

- Integrando entre la popa y la sección del eje ZZ', se hallará el volumen de la cuña,

$$v_{pp} = \int 2y \cdot (x - f) \cdot \frac{a}{E} \cdot dx$$

- Multiplicando por la densidad dará el empuje de la zona de popa de las cuñas,

$$B_{pp} = \gamma \int 2y \cdot (x - f) \cdot \frac{a}{E} \cdot dx$$

- Finalmente, multiplicando por el brazo longitudinal, x, resultará la ecuación para hallar el momento,

$$M_{bc} = \gamma \int 2y \cdot (x - f) \cdot \frac{a}{E} \cdot x \cdot dx \quad (4.34)$$

$$M_{bc} = \gamma \cdot \frac{a}{E} \int 2y \cdot (x - f) \cdot x \cdot dx \quad (4.35)$$

De la ecuación 4.31,

$$\frac{a}{E} = \frac{p \cdot d_F}{\gamma \cdot I_L}$$

Y sustituyendo.

$$M_{bc} = \frac{p \cdot d_F}{I_L} \int 2y \cdot (x - f) \cdot x \cdot dx \quad (4.36)$$

Por su parte, la integral la descompondremos en sus dos términos, resultando ser el primero la inercia longitudinal de la flotación a popa de la sección ZZ' con respecto a la misma, mientras que el segundo término integral será el momento de la superficie de flotación a popa de la sección ZZ' y, también, con respecto a la misma, que además, estará multiplicada por f, distancia entre el eje ZZ' y F, centro de gravedad de toda la superficie de flotación. Veamos a continuación lo expuesto.

$$\int 2y \cdot (x - f) \cdot x \cdot dx = \int 2y \cdot x^2 \cdot dx - \int 2y \cdot x \cdot f \cdot dx$$

$$\int 2y \cdot x^2 \cdot dx = I_{pp}$$

$$\int 2y \cdot x \cdot f \cdot dx = f \int 2y \cdot x \cdot dx = f \cdot M_{pp}$$

Por lo tanto, la ecuación 4.36 quedará de la forma siguiente,

$$M_{bc} = \frac{p \cdot d_F}{I_L} \cdot (I_{pp} - M_{pp} \cdot f) \quad (4.37)$$

Ahora se está en disposición de calcular la variación del momento flector máximo, para lo cual se sumarán algebraicamente las ecuaciones 4.32, 4.33 y 4.37, dando signo positivo al momento flector del peso y negativo a los momentos flectores de los empujes de la inmersión paralela y de las cuñas, obteniéndose así la ecuación general.

$$\delta MF = p \cdot (d_F + f) - p \frac{M_{pp}}{S_{pp}} - \frac{p \cdot d_F}{I_L} (I_{pp} - M_{pp} \cdot f) \quad (4.38)$$

La variación del momento flector por unidad de peso, será

$$\frac{\delta MF}{P} = (d_F + f) - \frac{M_{pp}}{S_{pp}} - \frac{d_F}{I_L} (I_{pp} - M_{pp} \cdot f) \quad (4.39)$$

Para el cálculo deberá tenerse en cuenta si se trata de una carga o de una descarga, que a su vez darán origen a una inmersión o emersión, según el caso, y siendo el efecto sobre la alteración apopante o aproante, respectivamente, todo ello si trabajamos como se ha hecho en la zona de popa.

Para trabajar a proa de la sección ZZ' del momento flector máximo, se puede repetir el proceso, por tanto llegando a la misma ecuación general, pero aplicada a la zona de proa.

La figura 4.15 muestra cómo sería una línea de influencia. La altura en el punto P, representa el efecto sobre el momento flector máximo al cargar un peso unidad en este punto. Las líneas de influencia suelen cortar al eje de abscisas a una cuarta parte de la eslora a una y otra banda de la perpendicular media. Las situaciones más adversas se presentarán para la condición de quebranto cuando, por ejemplo, se consuma de los tanques situados en la zona central del buque, y para el arrufo cuando se consuma de los tanques de las cabezas.

La obtención de las líneas de influencia se complica al suponer el buque en la cresta o en el seno de una ola trocoidal en lugar de flotar en aguas quietas. En este caso el cálculo de las líneas de influencia se planteará desde la perspectiva de los medios disponibles para su realización y de la aproximación que pueda ser aceptable.

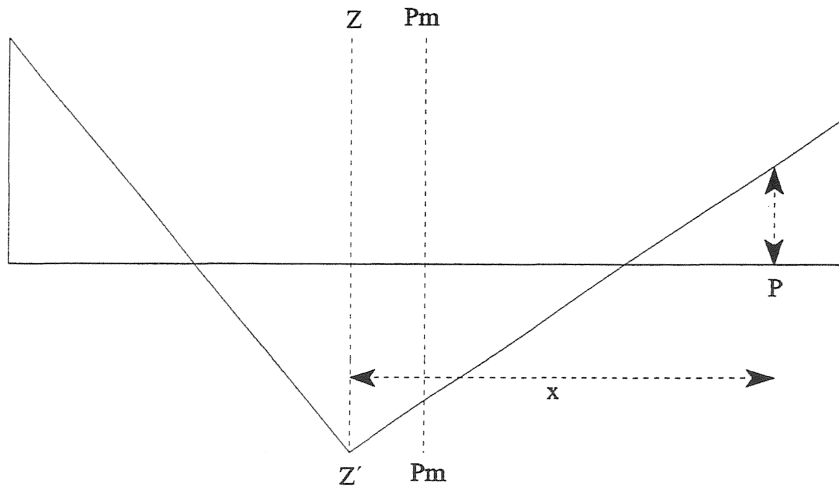


Fig. 4.15 Línea de influencia

4.12 Flecha de la flexión de la quilla

Además de las curvas de pesos, empujes, cargas, esfuerzos cortantes y momento flector, sería interesante conocer las deformaciones de quebranto o arrufo que se producen para unas condiciones

de carga determinadas, suponiendo al buque en la cresta o en el seno de la ola trocoidal, y, también, en aguas tranquilas.

La ecuación diferencial de la elasticidad se aplica, en la práctica general, cuando las deformaciones son pequeñas y, por lo tanto, la curvatura que toma la viga-casco y, en consecuencia la quilla, es poco acentuada. Esta ecuación diferencial, entre dos secciones transversales separadas dx , se escribe de la manera siguiente,

$$M_F = E \cdot I \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \quad (4.40)$$

M_F	momento flector entre secciones
E	módulo de elasticidad del material
I	inercia del área del material de la sección transversal
z	flecha de la flexión de la quilla
x	igual a la eslora del buque

La flexión de la quilla se obtendrá integrando la ecuación anterior para cada condición de carga.

$$MF = \int E \cdot I \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \cdot dx \quad (4.41)$$

A partir de la ecuación 4.40 se deduce la ecuación de la pendiente de la flexión, que será,

$$\frac{dz}{dx} = \int \frac{M_F}{E \cdot I} dx \quad (4.42)$$

Si el material de construcción es homogéneo a lo largo de la eslora de la viga-casco, el módulo de elasticidad será constante y podrá sacarse fuera de la integral,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M_F}{I} dx \quad (4.43)$$

Para hallar la flecha de la flexión de la quilla se integrará la pendiente, tal como se muestra en la ecuación siguiente,

$$z = \int \frac{dz}{dx} dx \quad (4.44)$$

Esta integral permitirá calcular la flecha en cualquier punto de la quilla, y por lo tanto, la flecha máxima de quebranto o arrufo que tendrá la viga-casco. Su cálculo presenta problemas importantes para el marino, como es el disponer de los valores del momento de inercia y el módulo de elasticidad

de cada sección. No obstante, con los medios actuales como son los ordenadores personales, y un programa adecuado, de tal manera que además de calcular la flotabilidad y estabilidad transversal y longitudinal del buque, y los esfuerzos longitudinales, calcule, también, la flecha para la condición de carga bajo estudio, lo que a su vez permitiría hallar los calados que tendrá el buque, teniendo en cuenta la deformación por quebranto o arrufo.

4.13 Esfuerzos longitudinales horizontales

Hasta aquí se han estudiado los esfuerzos longitudinales verticales a los que se ha denominado, simplemente, esfuerzos longitudinales. Además, la viga-casco está sujeta a otros esfuerzos, como son los esfuerzos longitudinales horizontales y los de torsión con respecto a un eje longitudinal.

Mientras que para el estudio de los esfuerzos verticales se suponía que la ola de encuentro llegaba al buque por su proa o por su popa, para que se produzcan esfuerzos horizontales, el buque recibirá a las olas por la amura o por la aleta, ya que esto creará unos campos de presiones a uno y otro costado del buque, que serán diferentes, incrementándose esta diferencia con el balance del buque. Cuando el buque esté flotando en aguas quietas, el campo de presiones de ambos costados será el mismo, siendo, por lo tanto, nula la resultante, con lo cual no existirán esfuerzos longitudinales horizontales por este motivo.

El cálculo de los esfuerzos longitudinales se realizará de manera semejante al utilizado para los esfuerzos verticales, con la diferencia que aquí intervienen las presiones laterales del agua, en lugar del peso y del empuje vertical del agua. En general, el momento flector horizontal es muy inferior al momento flector vertical, esto hace que en el buque no sea necesario su cálculo.

4.14 Momento de torsión

Tal como se ha citado en el apartado anterior, otro elemento de deformación de la viga-casco es la torsión que pueda sufrir un buque sobre un eje longitudinal. Una de las causas de este momento transversal de torsión son las olas que llegan al buque por la amura o por la aleta. Las peores condiciones se producirán cuando el buque esté navegando con olas abiertas 45° o 135° a una u otra banda de la proa, siendo la proyección de la longitud de la ola sobre el buque igual a su eslora.

La torsión tiene poca importancia en los buques de carga que podríamos llamar convencionales, pero la llegada de los portacontenedores con grandes escotillas en la cubierta resistente ha planteado la necesidad de realizar su cálculo a bordo para las diferentes propuestas de carga, ya que se ha encontrado que los momentos de torsión crecen notablemente con este tipo de buques, aunque sus solicitaciones siguen estando, normalmente, bastante por debajo de aquéllas de los esfuerzos longitudinales verticales.

En la figura 4.16 se observa un buque recibiendo las olas por la amura de babor, como ejemplo, con el seno en el centro y las crestas en las cabezas. Con respecto al plano diametral, que es el plano de simetría del buque, la ola avanza por el costado de babor con cierto adelanto con respecto al costado de estribor. Suponiendo el buque dividido en dos zonas, proa y popa, la primera tendrá más empuje

en la banda de babor que en la de estribor, mientras que en la zona de popa ocurrirá al revés. En la figura 4.17 se representa una sección transversal de la zona de proa del ejemplo anterior, bajo un planteamiento de cuñas de inmersión y emersión idealizado para su mejor comprensión. Todo ello produce un momento de torsión que tendrá su origen en el empuje de cada una de las bandas de la rebanada y en los brazos de los centros de estos empujes al plano diametral.

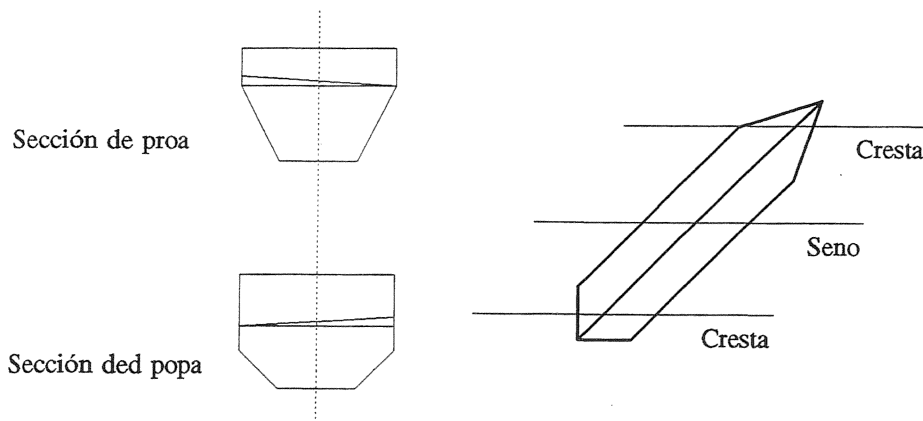


Fig. 4.16 Paso de una ola abierta por babor

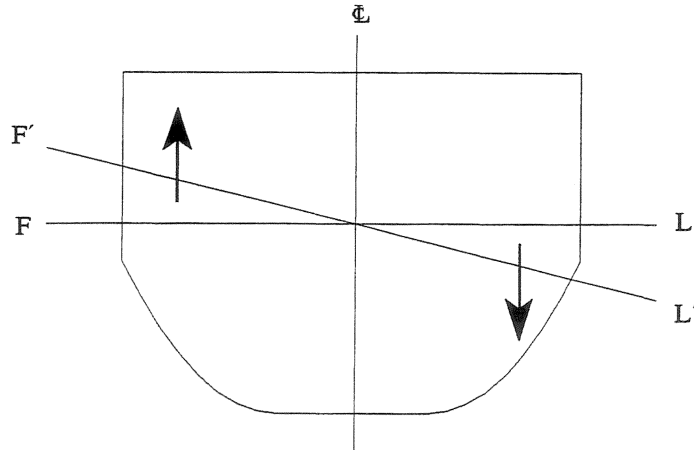


Fig. 4.17 Momento de torsión producido por el empuje de las cuñas

Al flotar el buque entre olas, estará sujeto al movimiento de balance, lo cual incrementará el valor del momento de torsión.

Además del momento de torsión producido por el perfil de la ola sobre el buque, también producen momentos de torsión la distribución no simétrica de los pesos de a bordo. La distribución simétrica de los pesos significa algo más que el importantísimo hecho de que el buque esté adrizado, también requiere la simetría con respecto al plano diametral, tanto en el peso como en el valor del brazo, en

este caso, distancia a dicho plano. A estos efectos los pesos se pueden dividir en dos grupos: tanques de lastre y servicios, y carga comercial del buque, siendo los contenedores el ejemplo clásico del último grupo, (Apéndice). Cada uno de los grupos aporta su influencia, pero cargas como la citada, suelen tener una incidencia importante junto con la distribución irregular del empuje del agua.

La curva del momento de torsión, (Fig. 4.18), se determina a partir de la torsión estática por unidad de longitud de las distintas secciones transversales situadas a intervalos regulares. Integrando esta curva se obtendrá la curva del momento torsor, (Fig. 4.19 y Apéndice), la cual varía desde cero en las cabezas, en popa y en proa, hasta un valor máximo hacia la mitad de la eslora. En el caso del ejemplo, el buque está en una condición de arrufo.

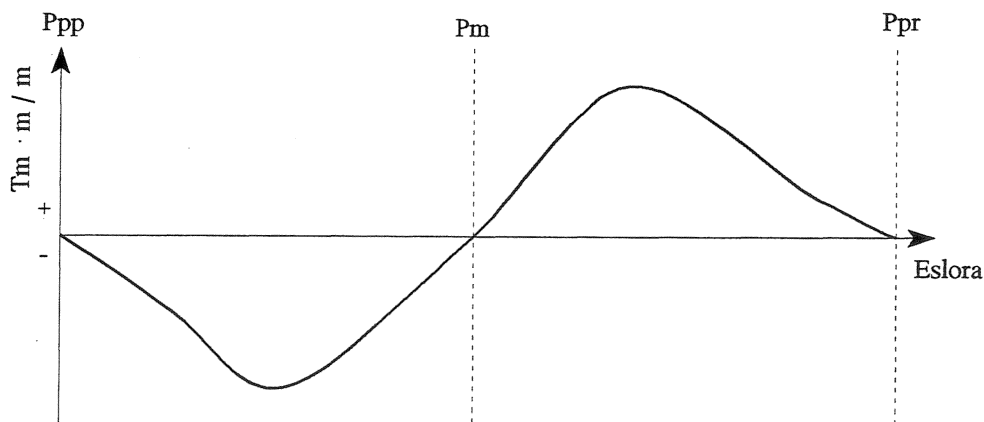


Fig. 4.18 Curva de la torsión estática por unidad de longitud

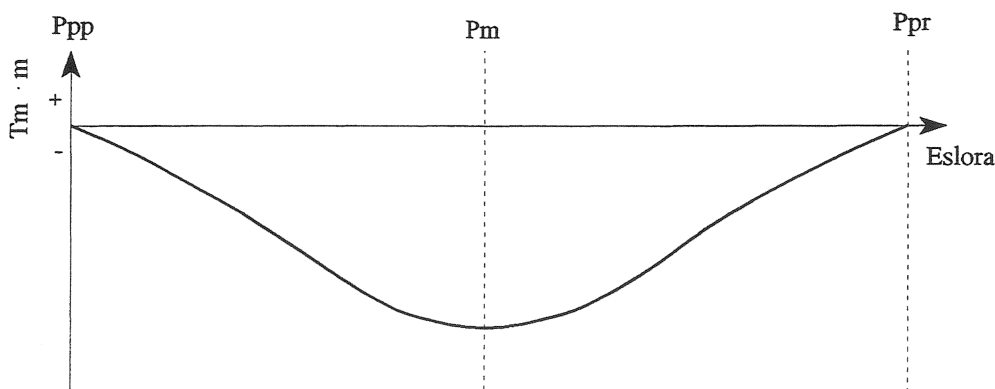


Fig. 4.19 Curva del momento de torsión

Con respecto a los métodos de cálculo que se siguen, hay que indicar que están menos normalizados que los cálculos de los esfuerzos longitudinales, no obstante, al igual que se hizo allí, es necesario que el método empleado para obtener los datos del diseño del buque sea el mismo que el utilizado a bordo para que los datos puedan ser comparables, y, por lo tanto, contrastables con los máximos permitidos.

Apéndice

Aplicación de los ordenadores: curvas de esfuerzos longitudinales y momento de torsión

En este apéndice se presenta la información de salida de un ordenador, elaborada por un programa personalizado. Esta información consta de las siguientes curvas de esfuerzos longitudinales y momento de torsión:

* CARGAS

- Curva de pesos por capas
 - Desplazamiento en rosca
 - Tanques de lastre y de servicios
 - Containers
- Curva de empujes

* ESFUERZOS CORTANTES

- Límites permisibles en puerto, (en aguas tranquilas)
- Límites permisibles en la mar, (entre olas)

* MOMENTO FLECTOR

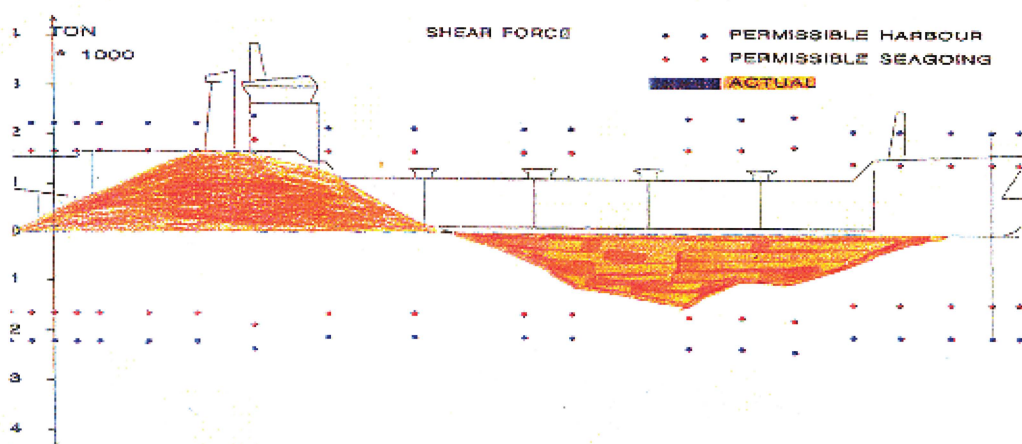
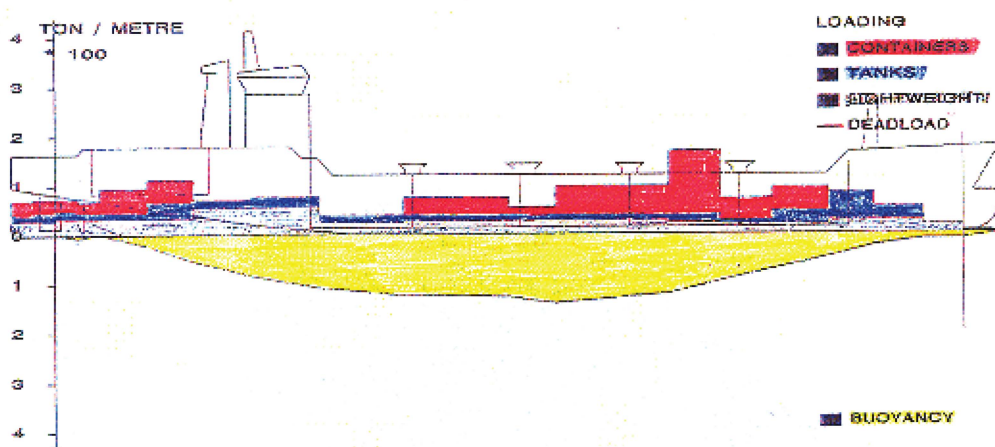
- Límites permisibles en puerto, (en aguas tranquilas)
- Límites permisibles en la mar, (entre olas)

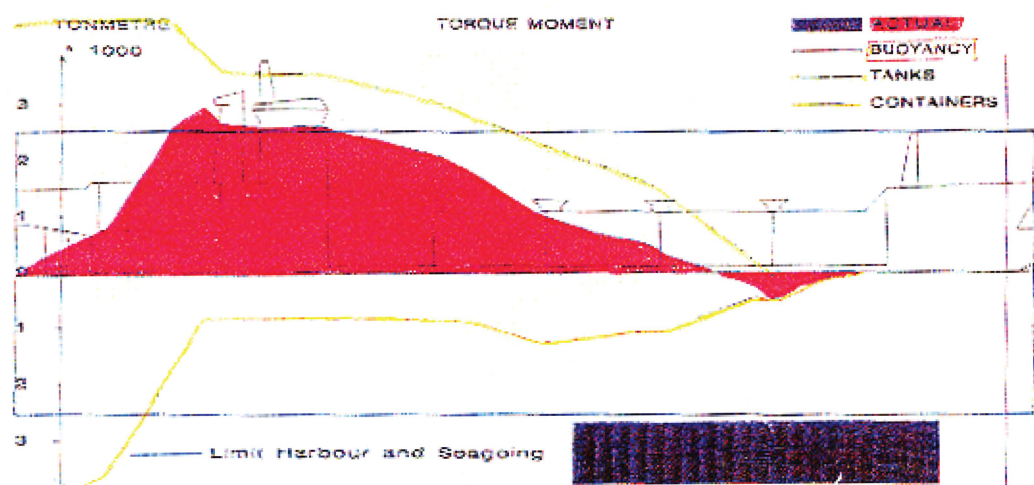
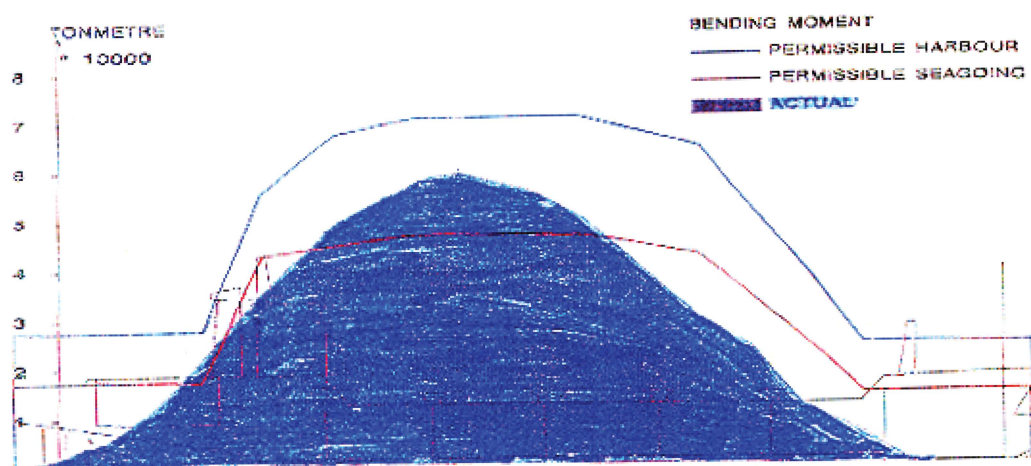
* MOMENTO DE TORSIÓN

- Empuje del agua sobre la viga-casco
- Tanques de lastre y de servicios
- Containers

- Límite permisible entre olas, (en puerto y en la mar)

En este caso, los valores máximos admisibles en aguas tranquilas, lo que denomina en puerto, son adecuadamente modificados, creando una segunda línea de valores más pequeños para los máximos admisibles entre olas, o navegando.





Bibliografía

ALÁEZ ZAZURCA, José Antonio. *Teoría del Buque (I)*. Madrid: ETSIN, UPM.

BROWN, Joan; COLLING, Angela; PARK, Dave; PHILIPS, John; ROTHERY, Dave; WRIGHT, John. *Waves, tides and shallow-water processes*. Great Britain: Pergamon Press in association with The Open University, 1991.

COMSTOCK, John P. *Principles of Naval Architecture*. New York: The Society of Naval Architecture and Marine Engineers, 1986.

GAMBOA, Marcial. *Nociones de Arquitectura Naval. (Teoría del Buque)*. 3ra. ed. Madrid: Editorial Naval, 1963.

KINSMAN, Blair. *Wind waves, their generation and propagation of the ocean surface*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1965.

KORVIN-KROUKOVSKY, B.V. *Theory of Seakeeping*. New York: The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1961.

LE MÉHAUTÉ, Bernard. *An introduction to hydrodynamics and water waves*. New York: Springer-Verlag, 1976.

LEWIS, Edward V. *Principles of Naval Architecture*. Jersey City: The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1988.

LÓPEZ GARCÍA, Gerardo; BENITA FERNÁNDEZ, Vicente. *Estructura del Buque. Tecnología y Cálculo*. Cádiz: Los autores: 1979.

MARTÍN DOMÍNGUEZ, Ricardo. *Cálculo de estructuras de buques. (Construcción Naval)*. Madrid: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, Universidad Politécnica de Madrid, 1969.

MEI, C.C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. New York: A Wiley-Interscience Publications, 1982.

- MUCKLE, W. *Naval architecture for marine engineers*. 2da. ed. London: Butterworths, 1987.
- MUNRO SMITH, R. *Ships and Naval Architecture*. London: The Institute of Marine Engineers, 1981.
- NEWMAN, J.N. *Marine hydrodynamics*. Cambridge, Massachussets: The MIT Press, 1977.
- OLIVELLA PUIG, Juan. *Teoría del Buque. Estabilidad, varada e inundación*. Barcelona: Edicions UPC, 1996.
- OLIVELLA PUIG, Juan. *Teoría del Buque. Flotabilidad y estabilidad*. 2da. ed. Barcelona: Edicions UPC, 1995.
- PRICE, W.G.; BISHOP, R.E.D. *Probabilistic theory of ship dynamics*. London: Chapman and Hall Ltd., 1974.
- RAWSON, K.J.; TUPPER, E.C. *Basic ship theory. Volume 1. Hydrostatics and strenght*. 4ta. ed. London: Longman, 1983.
- RAWSON, K.J.; TUPPER, E.C. *Basic ship theory. Volume 2. Ship dynamics and design*. 4ta. ed. London: Longman, 1984.
- ROSELL, H.E.; CHAPMAN, L.B. *Principles of Naval Archiecture*. New York: The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1962.
- STOKER, J.J. *Water waves. The mathematical theory with applications*. New York: Interscience publishers, Inc., 1957.
- STOKOE, E.A. *Reed's Naval Architecture for Marine Engineers*. London: Thomas Reed Publications Limited, 1991.
- WHITE, G.H. *Elementary beam theory and the ship girder*. London: Stanford Maritime, 1979.

Índice alfabético

A

Acoplamiento, 80, 162
Alargamiento, 167, 168
Altura metacéntrica, 86, 101, 143
Arrufo, 172, 173, 174

B

Balance
 absoluto, 93, 101
 aceleración angular, 90
 disminución, 117
 ecuación diferencial, 88
 forzado, 133
 relativo, 93
 velocidad angular, 90
Balance en aguas tranquilas
 con resistencia, 115, 123, 133
 sin resistencia, 86, 92
Balance entre olas
 con resistencia, 127, 135, 146
 sin resistencia, 93, 99

C

Cabeceo, 83
Cabeceo entre olas
 con resistencia, 153, 157
 sin resistencia, 148
Características de la ola
 altura, 19, 42
 amplitud, 19
 cresta, 18
 elevación, 19
 frecuencia, 19
 longitud, 18, 42
 número, 19

 pendiente, 19, 21
 período, 19
 seno, 18
 velocidad, 19
Cargas, 171, 181, 187
Centro orbital, 65
Cicloide reducida, 42
Coeficiente de seguridad, 165, 171
Condiciones de contorno, 30
 cinemática, 31
 de la superficie libre, 32
 dinámica, 31
Curvas de
 Bonjean, 178
 cargas, 181, 187
 empujes, 178, 203
 esfuerzos cortantes, 182, 185, 186, 188, 203
 momento de torsión, 200, 205
 momento flector, 184, 185, 186, 188, 205
 pesos, 177, 203

E

Ecuación de
 Bernoulli, 29, 53
 continuidad, 29
 Laplace, 29
Eje de oscilación, 81
Eje neutro, 167, 170
Empuje, 79, 165, 171, 178
Energía de la ola, 71, 75
 cinética, 73
 potencial, 73
Equilibrio
 condiciones, 79, 84
Escala
 Beaufort, 25

Douglas, 25
 Esfuerzo, 168
 Esfuerzos cortantes, 172, 182, 185, 186, 188
 Esfuerzos longitudinales
 en aguas quietas, 171
 entre olas, 173
 altura de la ola, 175
 de torsión, 165, 198
 horizontales, 165, 198
 verticales, 165
 Estabilidad dinámica, 118
 Euleriano, 28

F

Fetch
 Flexión
 flecha, 196
 pendiente, 197
 Frecuencia de la ola, 19
 Fuerzas dinámicas, 166
 Fuerzas estáticas, 166

G

Grados de libertad, 79

H

Horizontal hidrodinámica, 46

I

Inercia de la masa, 86, 149
 Inercia de la sección transversal, 169
 Irrotacional, 27, 28

L

Lagrangiano, 28
 Ley de Hook, 167
 Línea de centros, 65, 73, 176
 Línea de influencia, 189
 Línea neutra, 167

M

Mar de fondo, 27
 Mar tendida, 27
 Módulo de elasticidad, 167
 Módulo resistente, 170
 Momento adrizante
 transversal, 87, 96, 127
 longitudinal, 150

Momento flector, 169, 170, 172, 182, 185, 186, 188
 Momento resistente, 170
 Movimiento armónico simple, 81, 82
 Movimiento oscilatorio amortiguado, 120
 Movimiento vertical, 158
 en aguas quietas
 con resistencia, 160
 sin resistencia, 158
 entre olas, 161
 Movimientos del buque
 rotación, 79
 traslación, 79, 80, 83

O

Ola
 armónica, 15
 bidimensional, 18, 47
 capilar, 16, 24
 de gravedad, 16, 23, 24, 27
 de superficie libre, 15, 23
 desarrollada, 24
 dispersiva, 20, 36, 37
 estacionaria, 49
 irregular, 15, 26
 plana progresiva, 33, 37
 progresiva, 49
 regular, 15, 26
 significativa, 21
 sinusoidal, 33
 Ola trocoidal
 ecuaciones paramétricas, 43
 geometría, 44
 Oscilación del buque, 84
 Oscilación forzada, 103

P

Pantocazos, 156
 Partícula de la ola, 16
 aceleración, 52, 57
 velocidad, 20
 Pendiente de la ola, 94, 98, 143
 Período de balance
 doble, 84, 86, 101, 119, 126, 127, 143
 simple, 84
 Período de encuentro, 21, 151, 153
 Período de la ola, 19, 58
 Período doble de cabeceo, 149
 Período doble vertical, 160
 Perturbación de la ola, 96, 99

Peso del casco, 165, 171, 177
Potencial de velocidad, 27, 33, 34
 profundidad infinita, 33
 profundidad finita, 34
Profundidad
 ilimitada, 16
 limitada, 17

Q

Quebranto, 172, 173, 174

R

Radio de giro de la masa, 86, 116
Radio de curvatura, 168, 170
Radio instantáneo, 50, 52, 58, 61
Radio orbital, 60, 63
Relación de dispersión, 33, 39
Resistencia
 del agua, 115, 119
 del aire, 116, 119

S

Semejanza, 102
Sincronismo
 longitudinal, 155
 transversal, 104, 109, 134, 139, 147
Superficie neutra, 167

T

Teoría de la flexión, 167
Teoría potencial, 28
Teoría trocoidal, 42
Triángulos de
 fuerzas, 56
 radios, 50, 54
 velocidades, 50
Trocoide, 42

V

Velocidad de encuentro, 21, 151
Velocidad de grupo, 37
Velocidad de la ola, 19, 49, 58
 profundidad infinita, 34
 profundidad finita, 35
Velocidad de una partícula, 20, 49
Vertical hidrodinámica, 46